



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**HEC**

**Mathématiques 1**

**1990**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## Partie I

1. Sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ , les fonctions  $x \mapsto 1/x$  et  $x \mapsto \cos x / \sin x$  sont continues, car  $x$  et  $\sin x$  ne s'annulent pas. Il reste à examiner la limite en 0.

### Méthode 1 — Développements limités usuels

Lorsque  $x \rightarrow 0$ , on dispose de  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  et de  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ . En mettant les deux termes de  $f$  au même dénominateur,

$$f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x}.$$

Le numérateur vaut  $x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ , et le dénominateur vaut  $x^2 + o(x^2)$ . On obtient donc

$$f(x) = \frac{x}{3} + o(x).$$

En particulier,  $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ . La fonction est continue sur tout  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

### Méthode 2 — Représentation intégrale et encadrement

Posons  $r(x) = \sin x - x \cos x$ . On a  $r(0) = 0$  et  $r'(x) = x \sin x$ , donc, par le théorème fondamental du calcul intégral,

$$r(x) = \int_0^x t \sin t \, dt.$$

Pour  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , on a  $0 \leq \sin t \leq t$  : la seconde inégalité résulte de la croissance de  $t - \sin t$ , dont la dérivée est  $1 - \cos t \geq 0$  et dont la valeur en 0 est nulle. Ainsi, pour  $x > 0$ ,

$$0 \leq r(x) \leq \int_0^x t^2 \, dt = \frac{x^3}{3},$$

puis  $0 \leq f(x) \leq \frac{x^2}{3 \sin x}$ . Comme  $\sin x/x \rightarrow 1$ , cette dernière borne tend vers zéro. Par encadrement,  $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$  et la continuité est établie.

La première méthode donne aussi le comportement au premier ordre de  $f$ ; la seconde prouve la continuité par un encadrement positif.

2. Pour  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ , les dénominateurs sont non nuls. La dérivée du quotient trigonométrique est

$$\left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Par conséquent,

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Au bord droit, cette formule donne la dérivée à gauche, et la même expression définit un prolongement dérivable dans un voisinage de  $\frac{\pi}{2}$ .

3. Le développement  $f(x) = x/3 + o(x)$  établi en 1. donne

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \rightarrow \frac{1}{3} \quad (x \rightarrow 0^+).$$

La dérivée à droite existe donc et vaut  $f'(0) = 1/3$ . Vérifions qu'elle est le prolongement continu de la dérivée calculée en 2.

En élevant au carré le développement de  $\sin x$ , on obtient  $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ .

Ainsi,

$$x^2 - \sin^2 x = \frac{x^4}{3} + o(x^4), \quad x^2 \sin^2 x = x^4 + o(x^4).$$

La formule de 2. donne donc  $f'(x) \rightarrow 1/3 = f'(0)$ . Sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ , cette dérivée est continue, puisque ses dénominateurs ne s'annulent pas.

La fonction et sa dérivée se prolongent ainsi continûment au bord gauche;  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , avec les dérivées unilatérales aux extrémités. On peut aussi utiliser la même expression pour  $x < 0$  proche de zéro, avec  $f(0) = 0$ : les développements précédents sont alors bilatéraux et donnent un prolongement  $C^1$  sur un ouvert contenant le segment.

4. Pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ , l'inégalité  $\sin x < x$  est stricte : la fonction  $x - \sin x$  a une dérivée  $1 - \cos x$  strictement positive sur cet intervalle et s'annule en 0. Comme  $\sin x > 0$ , la formule de 2. implique  $f'(x) > 0$ . Au point 0, on a aussi  $f'(0) = 1/3 > 0$ .

Le théorème des accroissements finis, applicable car  $f$  est continue sur le segment et dérivable à l'intérieur, montre que  $f$  est strictement croissante. Ses valeurs extrêmes sont

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

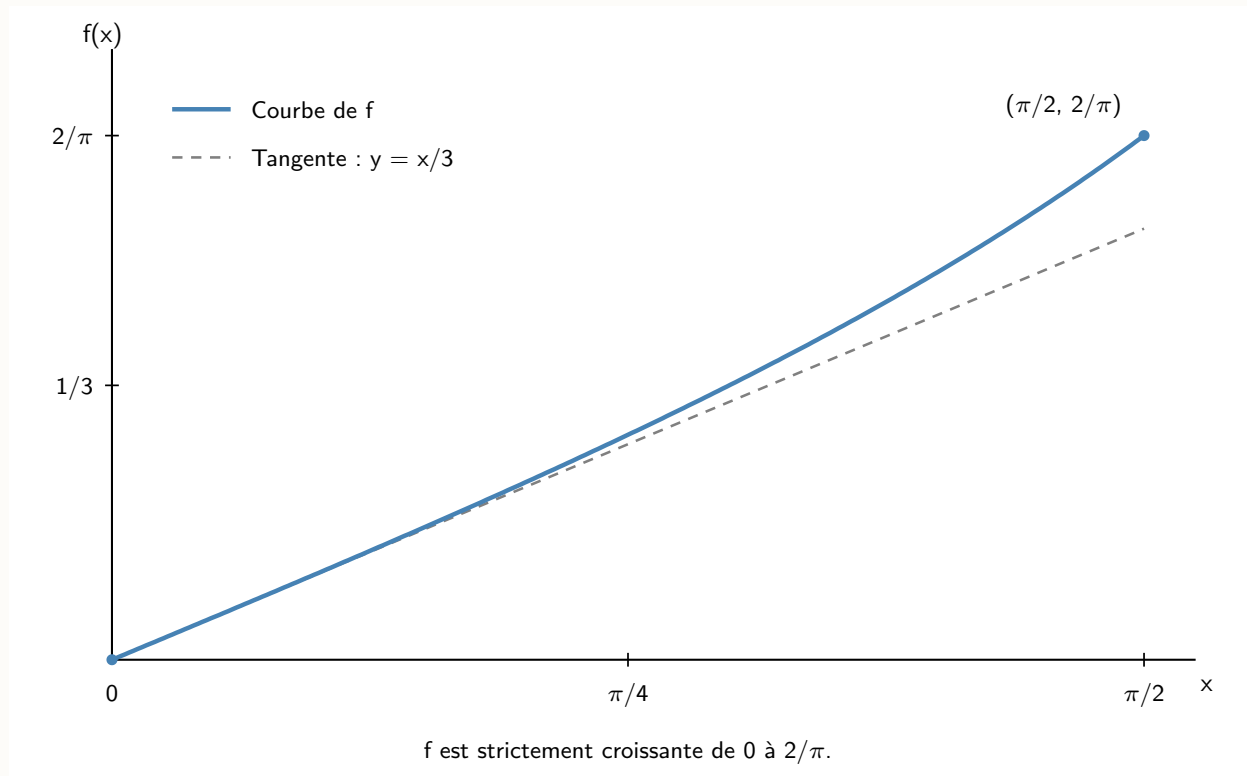
| $x$              | 0 | $\frac{\pi}{2}$               |
|------------------|---|-------------------------------|
| Signe de $f'$    | + | +                             |
| Variation de $f$ | 0 | Croît jusqu'à $\frac{2}{\pi}$ |

En particulier,  $0 \leq f(x) \leq 2/\pi$  sur tout le segment. La tangente en l'origine est  $y = x/3$ .

Au bord droit, la pente vaut  $f'(\frac{\pi}{2}) = 1 - 4/\pi^2$ , et la tangente a pour équation

$$y = \frac{2}{\pi} + \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

La courbe suivante est tracée à partir de l'expression de  $f$  ; la droite en pointillés est la tangente en l'origine.



## Partie II

1. Posons  $x_0 = x_{n+1} = 0$  pour écrire les extrémités comme les autres lignes. D'après la définition des coefficients de  $A_n$ ,

$$(A_n X)_i = x_{i-1} + x_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Ainsi le premier coefficient est  $x_2$ , le dernier est  $x_{n-1}$  et, pour  $2 \leq i \leq n-1$ , le coefficient d'indice  $i$  est  $x_{i-1} + x_{i+1}$ . Pour  $n = 2$ , la plage des indices intérieurs est vide et  $A_2 X = {}^t(x_2, x_1)$ .

En multipliant à gauche par  ${}^tX$ ,

$$q_n(X) = \sum_{i=1}^n x_i(x_{i-1} + x_{i+1}) = \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

2. (a) Pour  $X = {}^t(x_1, x_2)$ , on a  $q_2(X) = 2x_1x_2$  et  ${}^tXX = x_1^2 + x_2^2$ . Les deux identités

$${}^tXX - q_2(X) = (x_1 - x_2)^2 \geq 0, \quad {}^tXX + q_2(X) = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

donnent exactement  $-{}^tXX \leq q_2(X) \leq {}^tXX$ .

(b) La matrice  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  échange les deux coordonnées. Les vecteurs  $U = {}^t(1, 1)$  et

$V = {}^t(1, -1)$  vérifient  $A_2U = U$  et  $A_2V = -V$ .

Ces vecteurs sont libres :  $\alpha U + \beta V = 0$  donne  $\alpha + \beta = 0$  et  $\alpha - \beta = 0$ , puis  $\alpha = \beta = 0$ . Ils forment donc une base de  $\mathbb{R}^2$ , dans laquelle  $A_2$  est représentée par  $\text{diag}(1, -1)$ .

Les valeurs propres sont donc 1 et  $-1$ , avec espaces propres respectifs  $\mathbb{R}U$  et  $\mathbb{R}V$ . La base  $(U, V)$  est une base de vecteurs propres.

(c) L'égalité  $|q_2(X)| = {}^tXX$  signifie que  $q_2(X) = {}^tXX$  ou que  $q_2(X) = -{}^tXX$ . D'après les carrés de a), cela équivaut respectivement à  $x_1 = x_2$  ou à  $x_1 = -x_2$ .

L'ensemble recherché est donc  ${}^t(R(1, 1)) \cup {}^t(R(1, -1))$ . Il contient le vecteur nul.

3. (a) Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , les inégalités  $(x_i - x_{i+1})^2 \geq 0$  et  $(x_i + x_{i+1})^2 \geq 0$  donnent

$$-(x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq 2x_i x_{i+1} \leq x_i^2 + x_{i+1}^2.$$

En sommant et en utilisant 1., on obtient l'encadrement demandé.

(b) Posons

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2).$$

Les coordonnées intérieures sont comptées deux fois et celles des extrémités une fois, donc

$$S = 2{}^tXX - x_1^2 - x_n^2 \leq 2{}^tXX.$$

La question a) donne  $|q_n(X)| \leq S \leq 2^t X X$ , d'où l'encadrement annoncé.

Si  $q_n(X) = 2^t X X$ , les deux inégalités sont des égalités. On a alors  $x_1 = x_n = 0$  et

$$0 = S - q_n(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2.$$

Tous les termes étant positifs ou nuls,  $x_i = x_{i+1}$  pour chaque  $i$ . Avec  $x_1 = 0$ , toutes les coordonnées sont nulles.

Si  $q_n(X) = -2^t X X$ , on a encore  $x_1 = x_n = 0$ , et cette fois

$$0 = S + q_n(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i + x_{i+1})^2.$$

On obtient  $x_{i+1} = -x_i$  pour chaque  $i$ , puis toutes les coordonnées sont nulles puisque  $x_1 = 0$ .

Réciproquement, si  $X = 0$ , l'égalité  $|q_n(X)| = 2^t X X$  est vérifiée. L'équivalence est donc établie, y compris pour  $n = 2$ .

(c) Par définition d'un vecteur propre,  $X \neq 0$  et  $A_n X = \lambda X$ . Ainsi,

$$q_n(X) = {}^t X A_n X = \lambda {}^t X X.$$

Comme  $X \neq 0$ , la question b) donne les inégalités strictes  $-2^t X X < q_n(X) < 2^t X X$ . Le nombre

$${}^t X X = \sum_i x_i^2$$

est strictement positif; on peut donc diviser pour conclure que  $-2 < \lambda < 2$ .

4. Pour chaque  $\lambda \in ]-2, 2[$ , il existe un unique  $t \in ]0, \pi[$  tel que  $\lambda = 2 \cos t$ , car le cosinus est continu et strictement décroissant de 1 à  $-1$  sur  $[0, \pi]$ .

(a) Nous construisons une solution réelle et vérifions directement la récurrence. Les formules d'addition donnent, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\cos((k+2)t) + \cos(kt) = 2 \cos t \cos((k+1)t),$$

$$\sin((k+2)t) + \sin(kt) = 2 \cos t \sin((k+1)t).$$

En effet, on développe les deux angles  $(k+1)t + t$  et  $(k+1)t - t$  puis on additionne. Les suites  $k \mapsto \cos(kt)$  et  $k \mapsto \sin(kt)$  satisfont donc la récurrence de  $E_\lambda$ .

Puisque  $t \in ]0, \pi[$ , on a  $\sin t > 0$ . Posons

$$v_k = u_0 \cos(kt) + \frac{u_1 - u_0 \cos t}{\sin t} \sin(kt).$$

La suite  $(v_k)$  satisfait la récurrence par linéarité, et  $v_0 = u_0$ ,  $v_1 = u_1$ . Une suite vérifiant une récurrence d'ordre deux est déterminée par ses deux premiers termes : si deux suites ont les mêmes termes d'indices 0 et 1, la relation impose par récurrence l'égalité de tous les suivants.

Ainsi  $u_k = v_k$  pour tout  $k \geq 0$ , soit

$$u_k = u_0 \cos(kt) + \frac{u_1 - u_0 \cos t}{\sin t} \sin(kt).$$

Cette preuve utilise uniquement des suites réelles et les formules d'addition ; elle ne suppose aucune formule générale de résolution supplémentaire.

(b) La condition  $u_0 = 0$  simplifie a) en  $u_k = C \sin(kt)$ , où  $C = u_1 / \sin t \in \mathbb{R}$ . La seconde condition devient  $C \sin((n+1)t) = 0$ .

Si  $\sin((n+1)t) \neq 0$ , on doit avoir  $C = 0$  ;  $F_\lambda(n)$  ne contient alors que la suite nulle.

Si  $\sin((n+1)t) = 0$ , comme  $0 < t < \pi$ , il existe un entier  $p \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $t = \frac{p\pi}{n+1}$ . Dans ce cas,

$$F_\lambda(n) = \left\{ \left( C \sin \left( \frac{kp\pi}{n+1} \right) \right)_{k \geq 0} : C \in \mathbb{R} \right\}.$$

La suite génératrice est non nulle, car son terme d'indice 1 est  $\sin t > 0$ . Ce sous-espace est donc de dimension 1.

- (c) Question adaptée au programme actuel : on précise  $\lambda \in ]-2, 2[$ , domaine sur lequel  $F_\lambda(n)$  a été défini. Toutes les valeurs propres appartiennent déjà à cet intervalle par 3.(c), donc cette précision ne retire aucune valeur propre possible.

Fixons  $X \neq 0$  et la suite décrite dans l'énoncé. Par 1., avec  $u_0 = u_{n+1} = 0$ , les  $n$  équations de  $A_n X = \lambda X$  s'écrivent

$$u_{j-1} + u_{j+1} = \lambda u_j \quad (1 \leq j \leq n).$$

Elles sont exactement la récurrence  $u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k$  pour  $0 \leq k \leq n-1$ . Les relations pour  $k \geq n$  sont imposées par la définition des termes suivants de la suite. Les équations matricielles sont donc équivalentes à l'appartenance de toute la suite à  $E_\lambda$ .

Ses deux valeurs de bord  $u_0 = u_{n+1} = 0$  étant déjà imposées, cela équivaut à l'appartenance à  $F_\lambda(n)$ . Enfin,  $X \neq 0$  garantit que l'équation matricielle fait bien de  $X$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . L'équivalence est démontrée.

- (d) Si  $\lambda$  est une valeur propre, 3.(c) permet de l'écrire  $2 \cos t$  avec  $0 < t < \pi$ . Un vecteur propre non nul fournit, par c), une suite non nulle dans  $F_\lambda(n)$ . D'après b), il faut donc  $t = \theta_p = p\pi/(n+1)$  pour un  $p \in \{1, \dots, n\}$ .

Réciproquement, pour chaque  $p$  de cet ensemble, la suite  $u_k = \sin(k\theta_p)$  satisfait la récurrence, s'annule pour  $k = 0$  et pour  $k = n+1$ , et son terme  $u_1 = \sin \theta_p$  est strictement positif. Par c),

$$X_p = {}^t(\sin \theta_p, \sin(2\theta_p), \dots, \sin(n\theta_p))$$

est un vecteur propre non nul associé à  $\lambda_p = 2 \cos \theta_p$ . Ce sont donc exactement toutes les valeurs propres.

Les angles  $\theta_p$  sont strictement croissants et appartiennent à  $]0, \pi[$ , où le cosinus est strictement décroissant. Les  $n$  valeurs propres sont ainsi distinctes. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants ; la famille  $(X_1, \dots, X_n)$  est donc une base de  $\mathbb{R}^n$ .

La matrice est diagonalisable et, en notant  $M_n$  la matrice de cette base,

$$M_n^{-1} A_n M_n = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

5. (a) La matrice  $A_n$  est symétrique, car la condition  $|i - j| = 1$  est inchangée lorsque l'on échange les indices. Pour les vecteurs propres considérés,

$$\lambda {}^tXY = {}^t(A_n X)Y = {}^tX {}^t(A_n)Y = {}^tX A_n Y = \mu {}^tXY.$$

Puisque  $\lambda \neq \mu$ , on obtient  ${}^tXY = 0$ . Les valeurs propres de  $X_p$  et  $X_q$  sont distinctes lorsque  $p \neq q$ , donc

$${}^t(X_p)X_q = \sum_{k=1}^n \sin(k\theta_p) \sin(k\theta_q) = 0.$$

(b) Question adaptée au programme actuel : la somme est démontrée par une identité trigonométrique réelle et un télescopage.

Les formules d'addition donnent  $\sin(2k\theta + \theta) - \sin(2k\theta - \theta) = 2 \sin \theta \cos(2k\theta)$ , soit l'identité demandée.

Fixons  $p \in \{1, \dots, n\}$  et posons  $\theta = \theta_p$ . En sommant pour  $k = 0, \dots, n$ , tous les termes intermédiaires s'annulent :

$$2 \sin \theta \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \sin((2n+1)\theta) - \sin(-\theta) = \sin((2n+1)\theta) + \sin \theta.$$

Or  $(n+1)\theta = p\pi$ , donc  $(2n+1)\theta = 2p\pi - \theta$  et  $\sin((2n+1)\theta) = -\sin \theta$ . Le membre droit est nul. Comme  $\sin \theta > 0$ , on peut diviser et conclure

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta_p) = 0, \quad \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta_p) = -1.$$

Enfin, la formule  $\cos(2u) = 1 - 2 \sin^2 u$ , obtenue par addition, donne

$${}^t(X_p)X_p = \sum_{k=1}^n \sin^2(k\theta_p) = \frac{1}{2} \left( n - \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta_p) \right) = \frac{n+1}{2}.$$

(c) Les coefficients de  $M_n$  sont symétriques en  $k, \ell$ , donc  ${}^t(M_n) = M_n$ . Le coefficient de ligne  $p$  et de colonne  $q$  de  ${}^t(M_n)M_n$  est le produit scalaire de ses colonnes  $X_p$  et  $X_q$ .

D'après a) et b), ce produit vaut zéro lorsque  $p \neq q$ , et  $(n+1)/2$  lorsque  $p = q$ . Ainsi,

$$M_n^2 = {}^t(M_n)M_n = \frac{n+1}{2}I_n.$$

On a donc  $\alpha_n = (n+1)/2 > 0$ . La matrice  $\frac{2}{n+1}M_n$  vérifie

$$M_n \left( \frac{2}{n+1}M_n \right) = \left( \frac{2}{n+1}M_n \right) M_n = I_n. \text{ Par conséquent,}$$

$$M_n^{-1} = \frac{2}{n+1}M_n.$$

### Partie III

Toutes les fonctions intégrées dans cette partie sont des sommes finies de fonctions trigonométriques, ou des produits de telles fonctions; elles sont continues sur  $[0, \pi]$ . Les intégrales sur ce segment existent, et la linéarité permet de développer les sommes finies sous l'intégrale.

- (a) Si  $k = 0$  ou  $\ell = 0$ , le produit est identiquement nul et son intégrale vaut zéro. Supposons désormais  $k, \ell \geq 1$ .

Si  $k \neq \ell$ , l'identité rappelée donne

$$\int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((k-\ell)t) - \cos((k+\ell)t)) dt.$$

Pour un entier non nul  $m$ ,  $\int_0^\pi \cos(mt) dt = [\sin(mt)/m]_0^\pi = 0$ . Les deux fréquences

considérées sont non nulles, donc l'intégrale vaut zéro.

Si  $k = \ell \geq 1$ , l'identité donne  $\sin^2(kt) = (1 - \cos(2kt))/2$ ; son intégrale vaut  $\pi/2$ . Ainsi,

$$\int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } k = \ell \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) En développant le carré de la somme finie,

$$\int_0^\pi g(t)^2 dt = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_k a_\ell \int_0^\pi \sin(kt) \sin(\ell t) dt.$$

La question a) annule tous les termes où  $k \neq \ell$ . Les termes diagonaux valent  $(\pi/2)a_k^2$ , donc

$$\int_0^\pi g(t)^2 dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Cette identité est établie pour une somme finie; aucune formule sur une série de fonctions n'est utilisée.

(c) Le coefficient de ligne  $p$  de  $M_n A$  vaut

$$\sum_{k=1}^n a_k \sin(p\theta_k).$$

Or  $p\theta_k = k\theta_p$ , donc ce coefficient est  $g(\theta_p)$ . Ainsi,

$$M_n A = \begin{pmatrix} g(\theta_1) \\ \vdots \\ g(\theta_n) \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M_n$  est inversible d'après II.5.(c). En multipliant par son inverse, on obtient

$$A = \frac{2}{n+1} M_n \begin{pmatrix} g(\theta_1) \\ \vdots \\ g(\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Le coefficient de ligne  $k$  est donc

$$a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^n g(\theta_p) \sin(k\theta_p).$$

(d) La condition d'interpolation  $g(\theta_p) = b_p$  pour tous  $p$  est, par c), équivalente au système  $M_n A = B$ . L'inversibilité prouvée en II.5.(c) donne une unique solution

$$A = M_n^{-1} B = \frac{2}{n+1} M_n B.$$

Il existe donc un unique vecteur de coefficients réalisant l'interpolation. Ces coefficients déterminent une fonction de la forme imposée; réciproquement, deux tels vecteurs définissant la même fonction auraient une différence dont le carré s'intègre à zéro, et b) imposerait que toutes les différences de coefficients soient nulles.

En prenant  $B = {}^t(1, \dots, 1)$ , on obtient en particulier l'unique fonction  $g_n$  étudiée ensuite.

2. (a) La formule de 1.(c), avec  $g_n(\theta_p) = 1$ , donne

$$a_k(n) = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^n \sin\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right) \quad (1 \leq k \leq n).$$

Posons  $\alpha = k\pi/(n+1) \in ]0, \pi[$ . Les formules d'addition donnent

$$2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(p\alpha) = \cos\left(\left(p - \frac{1}{2}\right)\alpha\right) - \cos\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)\alpha\right).$$

En sommant pour  $p = 1, \dots, n$ , la somme télescopique vaut

$$2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{p=1}^n \sin(p\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right).$$

Comme  $(n+1)\alpha = k\pi$ , on a  $\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha = k\pi - \frac{\alpha}{2}$  et, par addition,

$\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right) = (-1)^k \cos(\alpha/2)$ . Le facteur  $\sin(\alpha/2)$  est strictement positif, donc

$$\sum_{p=1}^n \sin(p\alpha) = \frac{1 - (-1)^k \cos(\alpha/2)}{2 \sin(\alpha/2)}.$$

Si  $k$  est pair, cette somme est nulle et  $a_k(n) = 0$ . Si  $k$  est impair, elle vaut  $\cos(\alpha/2)/\sin(\alpha/2)$  et donne

$$a_k(n) = \frac{2}{n+1} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}.$$

Comme en II.5.(b), le calcul repose sur les formules d'addition et sur l'annulation des termes intermédiaires d'une somme finie.

(b) Pour  $k$  impair et  $1 \leq k \leq n$ , posons  $x = \frac{k\pi}{2(n+1)}$ . On a  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . En utilisant a) et la définition de  $f$ ,

$$\frac{4}{k\pi} - a_k(n) = \frac{2}{n+1} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{2}{n+1} f(x).$$

D'après I.4,  $0 \leq f(x) \leq 2/\pi$ . En multipliant par  $2/(n+1) > 0$ , on obtient

$$0 \leq \frac{4}{k\pi} - a_k(n) \leq \frac{4}{(n+1)\pi}.$$

(c) Question adaptée au programme actuel : on impose  $k \geq 1$  fixé et l'on considère les indices  $n \geq \max(2, k)$ , car les coefficients  $a_k(n)$  sont définis seulement pour  $1 \leq k \leq n$ . Aucun coefficient d'indice zéro n'a été défini dans le problème.

Si  $k$  est pair, la question a) donne  $a_k(n) = 0$  pour tous les indices considérés, donc  $\beta_k = 0$ .

Si  $k$  est impair, la question b) encadre  $\frac{4}{k\pi} - a_k(n)$  entre zéro et une quantité qui tend vers zéro. Par encadrement,  $a_k(n) \rightarrow \frac{4}{k\pi}$ . Ainsi,

$$\beta_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

3. (a) La différence  $g_n - h_n$  est une somme finie de sinus de coefficients  $a_k(n) - \beta_k$ .  
D'après 1.(b),

$$D_n = \int_0^\pi [g_n(t) - h_n(t)]^2 dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n [a_k(n) - \beta_k]^2.$$

Lorsque  $k$  est pair, la différence de coefficients est nulle. Lorsque  $k$  est impair, 2.(b) et 2.(c) donnent  $|a_k(n) - \beta_k| \leq \frac{4}{(n+1)\pi}$ . En majorant le nombre de termes par  $n$ ,

$$0 \leq D_n \leq \frac{\pi}{2} n \left( \frac{4}{(n+1)\pi} \right)^2 = \frac{8n}{\pi(n+1)^2} \rightarrow 0.$$

L'intégrale demandée tend donc vers zéro. Le nombre de coefficients varie avec  $n$ , mais la borne commune permet de contrôler la somme entière.

(b) Résultat admis dans cette version adaptée : la série

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$$

a pour somme  $\pi^2/8$ . Ce résultat est déjà admis dans l'énoncé original. Il sera utilisé comme limite des sommes partielles sur les entiers impairs.

Posons

$$S_n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2}.$$

Alors  $S_n \rightarrow \pi^2/8$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ ,

$$\int_0^\pi \sin(kt) dt = \left[ -\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi = \frac{1 - (-1)^k}{k}.$$

La formule de  $\beta_k$  donne donc

$$\int_0^\pi h_n(t) dt = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \frac{4}{k\pi} \frac{2}{k} = \frac{8}{\pi} S_n.$$

D'autre part, 1.(b) donne

$$\int_0^\pi h_n(t)^2 dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k^2 = \frac{\pi}{2} \frac{16}{\pi^2} S_n = \frac{8}{\pi} S_n.$$

En développant le carré, on obtient ainsi

$$K_n = \int_0^\pi [1 - h_n(t)]^2 dt = \pi - 2\frac{8}{\pi}S_n + \frac{8}{\pi}S_n = \pi - \frac{8}{\pi}S_n.$$

Comme  $S_n \rightarrow \pi^2/8$ , on conclut que  $K_n \rightarrow 0$ .

Chaque calcul porte sur une somme finie ; on prend ensuite la limite d'une suite numérique de sommes partielles. Aucun échange entre une série infinie et une intégrale n'est nécessaire.

### (c) Méthode 1 — Inégalité élémentaire sur le carré d'une somme

Pour tous réels  $u, v$ ,  $(u + v)^2 \leq 2u^2 + 2v^2$ , puisque  $2u^2 + 2v^2 - (u + v)^2 = (u - v)^2 \geq 0$ .

Écrivons  $1 - g_n = (1 - h_n) + (h_n - g_n)$ . En appliquant l'inégalité point par point puis en intégrant,

$$0 \leq J_n \leq 2K_n + 2D_n.$$

Les questions a) et b) donnent  $D_n \rightarrow 0$  et  $K_n \rightarrow 0$ . Par encadrement,  $J_n \rightarrow 0$ .

### Méthode 2 — Annulation exacte du terme croisé par orthogonalité

Pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$ , les calculs de 1.(a) donnent

$$\int_0^\pi [1 - h_n(t)] \sin(kt) dt = \frac{1 - (-1)^k}{k} - \frac{\pi}{2}\beta_k = 0.$$

En effet, les deux termes sont nuls si  $k$  est pair ; si  $k$  est impair, ils valent tous deux  $2/k$ .

La fonction  $h_n - g_n$  étant une combinaison linéaire de ces  $n$  sinus, la linéarité donne

$$\int_0^\pi [1 - h_n(t)][h_n(t) - g_n(t)] dt = 0.$$

En développant cette fois exactement le carré de  $1 - g_n = (1 - h_n) + (h_n - g_n)$ , le terme croisé disparaît et l'on obtient  $J_n = K_n + D_n$ . Les deux suites tendant vers zéro, on

conclut de nouveau

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

La première méthode utilise seulement une majoration ; la seconde précise comment se décompose exactement l'erreur grâce aux intégrales d'orthogonalité démontrées dans le problème.

## Relevé des adaptations

---

- II.4.(c) : précision du domaine  $\lambda \in ]-2, 2[$  pour que  $F_\lambda(n)$  soit défini. L'encadrement de II.3.(c) garantit que toutes les valeurs propres sont conservées.
- II.5.(b) : remplacement du calcul faisant intervenir un nombre complexe par une identité trigonométrique réelle et une somme télescopique ; les conclusions sur les cosinus et la norme de  $X_p$  sont conservées.
- III.2.(c) : restriction à un entier  $k \geq 1$  fixé, avec  $n \geq \max(2, k)$ , afin que les coefficients dont on prend la limite soient définis.