



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1989

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Soit k un nombre entier naturel non nul. L'objet du problème est l'étude de la série de terme général $\frac{1}{p^{2k}}$, où $p \geq 1$.

Préliminaire

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul p :

$$(0) \quad \frac{1}{(p+1)^{2k}} \leq \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1}{p^{2k-1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k-1}} \right) \leq \frac{1}{p^{2k}}.$$

En déduire la convergence de la série de terme général $\frac{1}{p^{2k}}$ et un majorant simple de sa somme.

Dans la suite, pour tout nombre entier naturel non nul n , on pose :

$$S_{2k}(n) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^{2k}}, \quad R_{2k}(n) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}}, \quad S_{2k} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = S_{2k}(n) + R_{2k}(n).$$

Dans la partie I, on traite le cas particulier où $k = 1$ et l'on détermine S_2 .

Dans la partie II, on étudie d'abord une suite de polynômes et l'on généralise la méthode de la partie I pour déterminer S_{2k} .

Partie I

Dans cette partie, on désigne par n un nombre entier naturel non nul.

1. On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par la relation :

$$f_1(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) \cot(\pi x), \quad \cot(\pi x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

Cette dernière expression est égale à $\frac{1}{\tan(\pi x)}$ lorsque la tangente est définie et non nulle.

(a) Comparer $f_1(x)$ et $f_1(1-x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

(b) Déterminer les limites de f_1 aux bornes de son ensemble de définition.

On prolonge désormais f_1 par continuité en 0 et en 1.

(c) Pour tout élément x de $]0, 1[$, calculer $f_1'(x)$. Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

(d) Construire la courbe représentative de f_1 .

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, il existe un nombre réel strictement positif a , indépendant de n , tel que :

$$\left| \int_0^1 f(x) \sin(2\pi n x) dx \right| \leq \frac{a}{n}.$$

En déduire la limite de $\int_0^1 f(x) \sin(2\pi n x) dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout nombre entier naturel non nul p , calculer l'intégrale :

$$I_p = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) \cos(2\pi p x) dx.$$

4. (a) Vérifier que, pour tout élément x de l'intervalle $]0, 1[$:

$$2 \sum_{p=1}^n \cos(2\pi p x) = \cot(\pi x) \sin(2\pi n x) + \cos(2\pi n x) - 1.$$

On pourra multiplier chacun des deux membres par $\sin(\pi x)$.

(b) À l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\sum_{p=1}^n I_p = \frac{1}{2} \int_0^1 f_1(x) \sin(2\pi nx) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) \cos(2\pi nx) dx$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) dx.$$

(c) En faisant tendre n vers $+\infty$, déduire de l'égalité précédente que :

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On se propose dans cette question de comparer $S_2(n)$, $S_2(n) + \frac{1}{n}$ et $\frac{\pi^2}{6}$.

(a) Écrire un algorithme en Python de calcul de $S_2(n)$ lorsque l'entier n est donné.

Comparer les valeurs décimales approchées à 10^{-6} près de $S_2(n)$, $S_2(n) + \frac{1}{n}$ et $\frac{\pi^2}{6}$ pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$.

(b) À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_2(n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leq S_2(n) + \frac{1}{n} - \frac{\pi^2}{6} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Expliquer alors les résultats numériques précédents.

Partie II

A) Étude d'une suite de polynômes

On se propose d'étudier les suites $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels satisfaisant aux trois conditions :

$$(1) \quad Q_0 = 1.$$

$$(2) \quad \forall n \geq 1, \quad Q'_n = Q_{n-1}.$$

$$(3) \quad \forall n \geq 2, \quad Q_n(1) = Q_n(0).$$

1. (a) Établir qu'il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels et une seule telle que :

$$r_0 = 1 \quad \text{et, pour } n \geq 2, \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j)!} = 0.$$

Expliciter r_1, r_2, r_3 et r_4 sous forme de fractions irréductibles.

On considère désormais la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^n \frac{r_j}{(n-j)!} X^{n-j}.$$

- (b) Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les propriétés (1), (2) et (3). Expliciter P_1, P_2, P_3 et P_4 .

2. On considère une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels vérifiant les propriétés (1), (2) et (3).

- (a) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^n \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} X^{n-j}.$$

(b) Montrer que la suite $(Q_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$Q_0(0) = 1 \quad \text{et, pour } n \geq 2, \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} = 0.$$

(c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $Q_n = P_n$.

3. (a) En considérant la suite de polynômes $((-1)^n P_n(1-X))_{n \in \mathbb{N}}$, établir que, pour tout nombre entier naturel n :

$$P_n(X) = (-1)^n P_n(1-X).$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul k , $r_{2k+1} = 0$. Calculer r_6 et r_8 . On pourra vérifier que $r_8 = -\frac{1}{1209600}$.

B) Expression de S_{2k}

1. Pour tout nombre entier naturel $k \geq 2$, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par la relation :

$$f_k(x) = (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cot(\pi x).$$

(a) Comparer $f_k(x)$ et $f_k(1-x)$.

(b) Déterminer les limites de f_k aux bornes de son ensemble de définition.

On prolonge désormais f_k par continuité en 0 et en 1.

(c) Prouver que f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. Pour tout nombre entier naturel non nul p , on considère les intégrales :

$$J_p(k) = \int_0^1 P_{2k}(x) \cos(2\pi p x) dx \quad \text{et} \quad I_p(k) = \int_0^1 (P_{2k}(x) - r_{2k}) \cos(2\pi p x) dx.$$

(a) Calculer $J_p(1)$.

(b) Exprimer $J_p(k+1)$ en fonction de $J_p(k)$. En déduire $J_p(k)$, puis $I_p(k)$.

3. (a) En calculant de deux façons la somme $I_1(k) + I_2(k) + \dots + I_n(k)$, puis en faisant tendre n vers $+\infty$, exprimer S_{2k} en fonction de r_{2k} .

(b) Retrouver ainsi l'expression de S_2 ; calculer S_4 , S_6 et S_8 .

4. À l'aide de l'inégalité (0), prouver que :

$$0 \leq S_{2k}(n) + \frac{1}{(2k-1)n^{2k-1}} - S_{2k} \leq \frac{1}{n^{2k}}.$$

En déduire des valeurs approchées à 10^{-6} près de S_4 , S_6 et S_8 ; les comparer aux valeurs exactes obtenues précédemment.