



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1989

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaire

Fixons $k \geq 1$ et posons $u(t) = \frac{1}{(2k-1)t^{2k-1}}$ pour $t > 0$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et $u'(t) = -t^{-2k}$. Pour $t \in [p, p+1]$, on a donc :

$$-\frac{1}{p^{2k}} \leq u'(t) \leq -\frac{1}{(p+1)^{2k}}.$$

L'inégalité des accroissements finis sur ce segment donne, puisque sa longueur vaut 1 :

$$\frac{1}{(p+1)^{2k}} \leq u(p) - u(p+1) \leq \frac{1}{p^{2k}}.$$

C'est exactement l'inégalité (0).

Pour $N \geq 2$, la première inégalité, sommée de $p = 1$ à $p = N-1$, donne :

$$\sum_{p=2}^N \frac{1}{p^{2k}} \leq u(1) - u(N) = \frac{1}{2k-1} \left(1 - \frac{1}{N^{2k-1}} \right).$$

Ainsi, pour tout $N \geq 1$:

$$1 \leq S_{2k}(N) \leq 1 + \frac{1}{2k-1}.$$

Les sommes partielles sont croissantes car les termes sont positifs, et elles sont majorées. Elles convergent donc vers une limite finie. La série converge et sa somme vérifie :

$$1 \leq S_{2k} \leq 1 + \frac{1}{2k-1} = \frac{2k}{2k-1}.$$

Les restes $R_{2k}(n) = S_{2k} - S_{2k}(n)$ sont dès lors bien définis et positifs.

Partie I

1. (a) Symétrie de la courbe

Rectification de la définition dans cette question : on utilise $\cot(\pi x) = \cos(\pi x) / \sin(\pi x)$ sur tout $]0, 1[$. En effet, la formule $1 / \tan(\pi x)$ donnée dans le document original n'a pas de sens en $x = 1/2$, où la tangente n'est pas définie. Le quotient retenu vaut 0 en ce point et prolonge cette formule.

Posons $h(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$. Un calcul donne $h(1-x) = h(x)$. Les formules d'addition, avec $\sin \pi = 0$ et $\cos \pi = -1$, donnent :

$$\sin(\pi(1-x)) = \sin(\pi x), \quad \cos(\pi(1-x)) = -\cos(\pi x).$$

Comme $\sin(\pi x) > 0$ pour $x \in]0, 1[$, les quotients sont définis et :

$$f_1(1-x) = -f_1(x).$$

La courbe admet donc le point $C = (1/2, 0)$ comme centre de symétrie. En particulier, $f_1(1/2) = 0$.

(b) Limites et prolongement

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\sin(\pi x) / (\pi x) \rightarrow 1$ et $\cos(\pi x) \rightarrow 1$, donc :

$$x \cot(\pi x) \rightarrow \frac{1}{\pi}.$$

Or $f_1(x) = \frac{x-1}{2} x \cot(\pi x)$. Il en résulte :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = -\frac{1}{2\pi}.$$

En posant $t = 1 - x$ et en utilisant la symétrie de la question précédente :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = - \lim_{t \rightarrow 0^+} f_1(t) = \frac{1}{2\pi}.$$

Le prolongement continu sur $[0, 1]$ est donc défini par $f_1(0) = -1/(2\pi)$ et $f_1(1) = 1/(2\pi)$. L'identité $f_1(1 - x) = -f_1(x)$ reste vraie aux extrémités.

(c) Dérivée et régularité aux extrémités

Sur $]0, 1[$, le dénominateur $\sin(\pi x)$ ne s'annule pas. La dérivée du quotient est :

$$\frac{d}{dx} \cot(\pi x) = -\frac{\pi}{\sin^2(\pi x)}.$$

Par dérivation du produit :

$$f_1'(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cot(\pi x) + \frac{\pi x(1-x)}{2 \sin^2(\pi x)}.$$

Pour justifier la régularité en 0, étudions l'auxiliaire $H(x) = x \cot(\pi x)$, prolongé par $H(0) = 1/\pi$. Les développements usuels du sinus et du cosinus en zéro, appliqués à la variable $y = \pi x$, donnent :

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3), \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

En particulier, $\sin(\pi x)/x = \pi + O(x^2)$ et $\cos(\pi x) = 1 + O(x^2)$. Pour contrôler la différence sans composer de développements limités, écrivons :

$$H(x) - \frac{1}{\pi} = \frac{\pi \cos(\pi x) - \sin(\pi x)/x}{\pi \sin(\pi x)/x} = O(x^2).$$

Le dénominateur tend vers $\pi^2 \neq 0$. Ainsi $(H(x) - H(0))/x \rightarrow 0$: la dérivée à droite $H'(0)$ existe et vaut 0.

Pour $x > 0$, la dérivation donne :

$$H'(x) = \frac{\sin(\pi x) \cos(\pi x) - \pi x}{\sin^2(\pi x)}.$$

En multipliant les deux développements précédents, on obtient $\sin y \cos y = y - \frac{2}{3}y^3 + o(y^3)$; de plus $\sin^2 y/y^2 \rightarrow 1$. Le numérateur de H' est donc $O(x^3)$ et son dénominateur est équivalent à $\pi^2 x^2$. Par conséquent, $H'(x) \rightarrow 0 = H'(0)$.

La fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 dans $[0, 1[$. Comme $f_1(x) = \frac{x-1}{2}H(x)$, son prolongement est également de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, avec :

$$f'_1(0) = \frac{1}{2}H(0) - \frac{1}{2}H'(0) = \frac{1}{2\pi}.$$

Enfin, $f_1(1-x) = -f_1(x)$ entraîne, à l'intérieur du segment, $f'_1(1-x) = f'_1(x)$. La même identité donne directement l'existence de la dérivée à gauche en 1, égale à $f'_1(0)$, et la continuité de la dérivée en 1. Ainsi :

$$f_1 \in \mathcal{C}^1([0, 1]), \quad f'_1(0) = f'_1(1) = \frac{1}{2\pi}.$$

(d) Construction de la courbe

Déterminons d'abord les variations. Pour $0 < x < 1/2$, la formule précédente se réécrit :

$$f'_1(x) = \frac{\frac{\pi}{2}x(1-x) - (\frac{1}{2} - x) \sin(\pi x) \cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

Sur cet intervalle, $0 \leq \cos(\pi x) \leq 1$ et $0 \leq \sin(\pi x) \leq \pi x$. La seconde inégalité résulte de l'inégalité des accroissements finis appliquée au sinus entre 0 et πx , puisque $|\cos t| \leq 1$.

Ainsi :

$$\frac{\pi}{2}x(1-x) - \left(\frac{1}{2} - x\right) \sin(\pi x) \cos(\pi x) \geq \frac{\pi}{2}x(1-x) - \left(\frac{1}{2} - x\right) \pi x = \frac{\pi}{2}x^2 > 0.$$

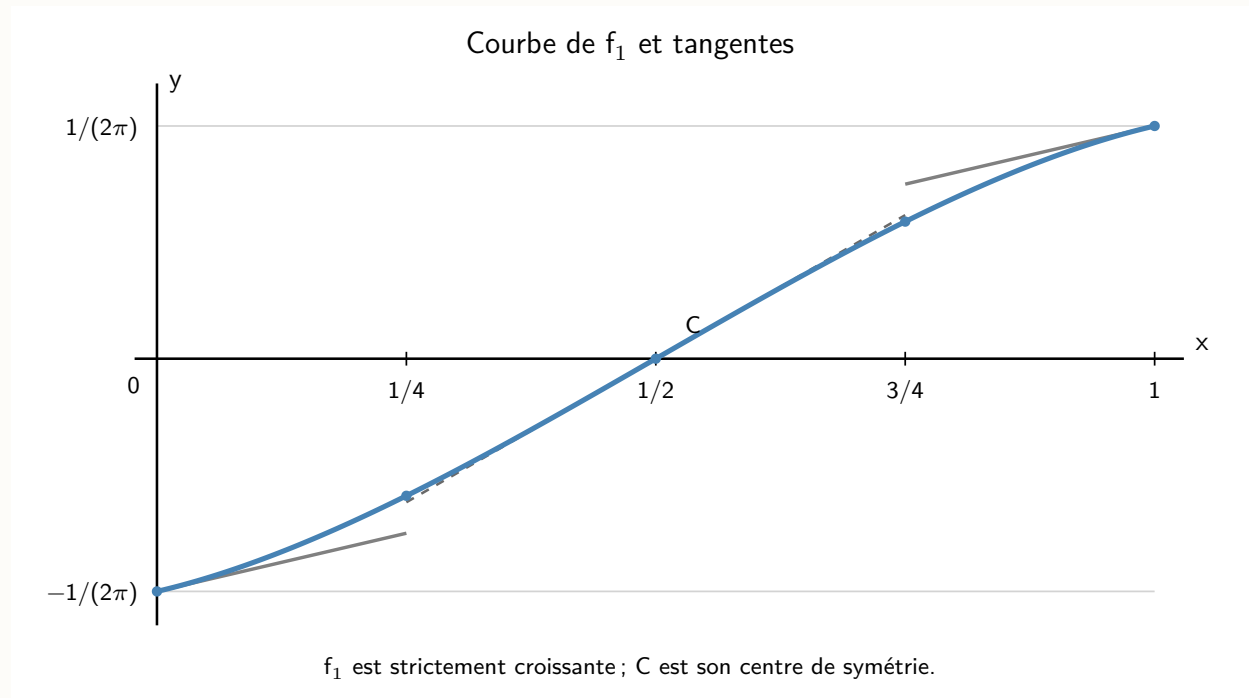
Donc $f'_1(x) > 0$ sur $]0, 1/2[$. En $1/2$, la formule exacte donne $f'_1(1/2) = \pi/8 > 0$. La symétrie $f'_1(1-x) = f'_1(x)$ montre aussi que la dérivée est positive sur $]1/2, 1[$. La fonction est donc strictement croissante sur $[0, 1]$.

x	0	1/4	1/2	3/4	1
$f_1(x)$	$-1/(2\pi)$	$-3/32$	0	$3/32$	$1/(2\pi)$

Les valeurs en $1/4$ et $3/4$ suivent de $\cot(\pi/4) = 1$ et de la symétrie. Les tangentes en 0, $1/2$ et 1 ont respectivement pour équations :

$$y = \frac{x-1}{2\pi}, \quad y = \frac{\pi}{8} \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad y = \frac{x}{2\pi}.$$

Le tracé ci-dessous utilise directement l'expression de f_1 à l'intérieur du segment et les valeurs de son prolongement aux extrémités. Les deux segments gris représentent les tangentes aux extrémités ; le segment pointillé représente la tangente au centre.



2. Majoration de l'intégrale oscillante

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$. Pour $n \geq 1$, une intégration par parties sur le segment, avec la primitive $-\cos(2\pi nx)/(2\pi n)$ du sinus, donne :

$$\int_0^1 f(x) \sin(2\pi nx) dx = \frac{f(0) - f(1)}{2\pi n} + \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 f'(x) \cos(2\pi nx) dx.$$

Les termes aux bornes utilisent $\cos(0) = \cos(2\pi n) = 1$. La continuité de f' garantit que

$\int_0^1 |f'(x)| dx$ est finie. Comme $|\cos t| \leq 1$, on obtient :

$$\left| \int_0^1 f(x) \sin(2\pi nx) dx \right| \leq \frac{|f(0)| + |f(1)| + \int_0^1 |f'(x)| dx}{2\pi n}.$$

On peut prendre

$$a = 1 + \frac{|f(0)| + |f(1)| + \int_0^1 |f'(x)| dx}{2\pi},$$

strictement positif et indépendant de n . Par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) \sin(2\pi nx) dx = 0.$$

3. Calcul de I_p

Fixons $p \geq 1$ et posons $\omega = 2\pi p$. Le polynôme $h(x) = x^2/2 - x/2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$, avec $h'(x) = x - 1/2$ et $h''(x) = 1$. Une première intégration par parties donne :

$$I_p = \left[\frac{h(x) \sin(\omega x)}{\omega} \right]_0^1 - \frac{1}{\omega} \int_0^1 h'(x) \sin(\omega x) dx = -\frac{1}{\omega} \int_0^1 h'(x) \sin(\omega x) dx.$$

Une seconde intégration par parties donne :

$$\int_0^1 h'(x) \sin(\omega x) dx = \left[-\frac{h'(x) \cos(\omega x)}{\omega} \right]_0^1 + \frac{1}{\omega} \int_0^1 \cos(\omega x) dx.$$

Le terme aux bornes vaut $(-h'(1) + h'(0))/\omega = -1/\omega$. L'intégrale restante vaut $[\sin(\omega x)/\omega]_0^1 = 0$. Par conséquent :

$$I_p = \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{4\pi^2 p^2}.$$

4. (a) Identité trigonométrique

Posons $\theta = \pi x \in]0, \pi[$. Les formules d'addition donnent, pour chaque p :

$$\sin((2p+1)\theta) - \sin((2p-1)\theta) = 2 \sin \theta \cos(2p\theta).$$

La somme de ces égalités pour $p = 1, \dots, n$ est télescopique :

$$2 \sin \theta \sum_{p=1}^n \cos(2p\theta) = \sin((2n+1)\theta) - \sin \theta.$$

Développons le dernier sinus par la formule d'addition :

$$\sin((2n+1)\theta) - \sin \theta = \cos \theta \sin(2n\theta) + \sin \theta \cos(2n\theta) - \sin \theta.$$

Puisque $\sin \theta > 0$, on peut diviser par ce nombre. On obtient bien :

$$2 \sum_{p=1}^n \cos(2\pi p x) = \cot(\pi x) \sin(2\pi n x) + \cos(2\pi n x) - 1.$$

La preuve est valable également en $x = 1/2$, grâce à la définition précisée de la cotangente.

(b) Identité intégrale

Multiplions l'identité précédente par $h(x)/2$. Sur $]0, 1[$, $h(x) \cot(\pi x) = f_1(x)$, donc :

$$\sum_{p=1}^n h(x) \cos(2\pi p x) = \frac{1}{2} f_1(x) \sin(2\pi n x) + \frac{1}{2} h(x) \cos(2\pi n x) - \frac{1}{2} h(x).$$

Tous les termes se prolongent continûment aux bornes du segment ; l'identité s'étend donc à $[0, 1]$. L'intégration et la linéarité pour une somme finie donnent :

$$\sum_{p=1}^n I_p = \frac{1}{2} \int_0^1 f_1(x) \sin(2\pi n x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 h(x) \cos(2\pi n x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 h(x) dx.$$

(c) Détermination de S_2

La question 3 donne

$$\sum_{p=1}^n I_p = S_2(n)/(4\pi^2)$$

et $\int_0^1 h(x) \cos(2\pi nx) dx = I_n = 1/(4\pi^2 n^2)$. D'autre part :

$$\int_0^1 h(x) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{12}.$$

L'égalité précédente devient :

$$\frac{S_2(n)}{4\pi^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 f_1(x) \sin(2\pi nx) dx + \frac{1}{8\pi^2 n^2} + \frac{1}{24}.$$

Comme $f_1 \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, la question 2 s'applique et le premier terme tend vers 0. Le deuxième tend également vers 0. Enfin, la convergence établie au préliminaire donne $S_2(n) \rightarrow S_2$. Le passage à la limite porte donc uniquement sur cette égalité de nombres réels et conduit à :

$$\frac{S_2}{4\pi^2} = \frac{1}{24}, \quad S_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. (a) Algorithme et comparaison numérique

Question adaptée au programme actuel : l'algorithme demandé, sans langage imposé dans le document original, est écrit en Python.

On initialise la somme à 0 puis on ajoute successivement les n termes. La borne supérieure de la boucle est $n + 1$, car elle est exclue dans la fonction range.

Python

```
import numpy as np

def somme_s2(n):
    s = 0.0
    for p in range(1, n + 1):
        s = s + 1.0 / p**2
    return s

for n in [10, 100, 1000]:
    s = somme_s2(n)
    print(n, s, s + 1.0 / n, np.pi**2 / 6)
```

Pour les entiers positifs de l'énoncé, ce code calcule les sommes demandées. Les valeurs arrondies à six décimales sont :

n	$S_2(n)$	$S_2(n) + 1/n$	$\pi^2/6$
10	1,549768	1,649768	1,644934
100	1,634984	1,644984	1,644934
1000	1,643935	1,644935	1,644934

Chaque arrondi est à moins de 10^{-6} de la quantité qu'il représente. La comparaison théorique est $S_2(n) \leq \pi^2/6 \leq S_2(n) + 1/n$. Pour $n = 1000$, la somme corrigée non arrondie vaut environ 1,644934566682 ; son erreur par rapport à $\pi^2/6$ est environ $4,99833 \times 10^{-7}$, même si leurs arrondis à six décimales diffèrent.

(b) Encadrements des erreurs

Pour $k = 1$, l'inégalité (0) est :

$$\frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{p^2}.$$

Sommons de $p = n$ à $p = N$, où $N \geq n$:

$$\sum_{p=n}^N \frac{1}{(p+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{p=n}^N \frac{1}{p^2}.$$

Les séries convergent d'après le préliminaire. Lorsque $N \rightarrow +\infty$, la somme de gauche tend vers $R_2(n)$ et celle de droite vers $1/n^2 + R_2(n)$. On obtient :

$$R_2(n) \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2} + R_2(n).$$

Puisque $R_2(n) \geq 0$, cela prouve simultanément :

$$0 \leq R_2(n) \leq \frac{1}{n}, \quad 0 \leq \frac{1}{n} - R_2(n) \leq \frac{1}{n^2}.$$

En remplaçant $R_2(n)$ par $\pi^2/6 - S_2(n)$, on retrouve exactement les deux encadrements demandés.

La somme partielle sous-estime donc S_2 , tandis que la somme corrigée le surestime. La borne de son erreur passe de $1/n$ à $1/n^2$, ce qui explique sa meilleure précision. Pour $n = 10, 100, 1000$, les bornes de l'erreur corrigée sont respectivement 10^{-2} , 10^{-4} et 10^{-6} ; celles de l'erreur non corrigée sont 10^{-1} , 10^{-2} et 10^{-3} .

Partie II

A) Étude d'une suite de polynômes

1. (a) Existence et unicité des coefficients

Dans la relation d'indice $n \geq 2$, le coefficient de r_{n-1} est $1/1! = 1$. Cette relation équivaut donc à :

$$r_{n-1} = - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{r_j}{(n-j)!}.$$

Autrement dit, pour tout $m \geq 1$:

$$r_m = - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{r_j}{(m+1-j)!}.$$

Partant de $r_0 = 1$, cette formule définit un et un seul terme à chaque étape. Elle construit donc une unique suite. Par récurrence, chacun de ses termes est rationnel : les termes précédents sont rationnels, les factorielles sont des entiers non nuls, et la somme est finie. Réciproquement, la suite ainsi construite satisfait toutes les relations imposées. Cette construction prouve également l'unicité parmi les suites réelles.

Pour $n = 2$, la relation est $1/2 + r_1 = 0$, d'où $r_1 = -1/2$.

Pour $n = 3$, elle est $1/6 + r_1/2 + r_2 = 0$, d'où :

$$r_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Pour $n = 4$, elle est $1/24 + r_1/6 + r_2/2 + r_3 = 0$, donc :

$$r_3 = -\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) = 0.$$

Pour $n = 5$, elle donne :

$$r_4 = -\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72}\right) = -\frac{1}{720}.$$

Les fractions non nulles obtenues sont irréductibles. Ainsi $r_1 = -1/2$, $r_2 = 1/12$, $r_3 = 0$ et $r_4 = -1/720$.

(b) Vérification des propriétés et premiers polynômes

La définition donne $P_0 = r_0 = 1$, ce qui est la propriété (1). Pour $n \geq 1$, le terme d'indice $j = n$ est constant. La dérivation des autres termes donne :

$$P'_n(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j-1)!} X^{n-j-1} = P_{n-1}(X).$$

C'est la propriété (2). En outre, $P_n(0) = r_n$ et

$$P_n(1) = \sum_{j=0}^n r_j / (n-j)!.$$

Pour $n \geq 2$:

$$P_n(1) - P_n(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{r_j}{(n-j)!} = 0.$$

La propriété (3) est donc vérifiée. En remplaçant les coefficients par leurs valeurs :

$$P_1(X) = X - \frac{1}{2}.$$

$$P_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}.$$

$$P_3(X) = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}.$$

$$P_4(X) = \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} - \frac{1}{720}.$$

2. (a) Expression d'une suite quelconque

Méthode 1 — Récurrence et primitives

Pour $n = 0$, la formule demandée se réduit à $Q_0(X) = Q_0(0) = 1$. Supposons la formule vraie pour un entier $n \geq 0$. Comme $Q'_{n+1} = Q_n$, l'intégration entre 0 et X donne :

$$Q_{n+1}(X) = Q_{n+1}(0) + \int_0^X Q_n(t) dt.$$

L'hypothèse de récurrence et l'intégration d'une somme finie de monômes donnent :

$$Q_{n+1}(X) = Q_{n+1}(0) + \sum_{j=0}^n \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} \frac{X^{n-j+1}}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{Q_j(0)}{(n+1-j)!} X^{n+1-j}.$$

La formule est donc vraie au rang suivant. Par récurrence, elle est établie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Formule de Taylor pour les polynômes

La relation $Q'_n = Q_{n-1}$ et $Q_0 = 1$ montrent par récurrence que Q_n a degré n : une primitive d'un polynôme de degré $n-1$ a degré n . De plus, pour $0 \leq \ell \leq n$, les dérivations successives donnent $Q_n^{(\ell)} = Q_{n-\ell}$.

La formule de Taylor, exacte pour un polynôme de degré n , fournit :

$$Q_n(X) = \sum_{\ell=0}^n \frac{Q_n^{(\ell)}(0)}{\ell!} X^\ell = \sum_{\ell=0}^n \frac{Q_{n-\ell}(0)}{\ell!} X^\ell.$$

En posant $j = n - \ell$, on obtient également :

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^n \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} X^{n-j}.$$

(b) Relations satisfaites par les valeurs en zéro

La propriété (1) donne $Q_0(0) = 1$. Pour $n \geq 2$, la formule de la question précédente donne :

$$Q_n(1) - Q_n(0) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_j(0)}{(n-j)!}.$$

Le terme d'indice $j = n$ s'est annulé dans la différence. La propriété (3) implique donc :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_j(0)}{(n-j)!} = 0.$$

(c) Unicité de la suite de polynômes

La suite réelle $(Q_j(0))$ satisfait les mêmes relations et la même condition initiale que (r_j) . L'unicité établie en A.1.(a), qui vaut aussi pour les suites réelles, donne $Q_j(0) = r_j$ pour tout j .

En utilisant A.2.(a), il vient pour tout n :

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^n \frac{r_j}{(n-j)!} X^{n-j} = P_n(X).$$

Ainsi (P_n) est l'unique suite de polynômes à coefficients réels satisfaisant les propriétés (1), (2) et (3).

3. (a) Symétrie des polynômes

Définissons $T_n(X) = (-1)^n P_n(1 - X)$. Ces polynômes sont réels et $T_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, la dérivation donne :

$$T'_n(X) = (-1)^{n+1} P_{n-1}(1 - X) = (-1)^{n-1} P_{n-1}(1 - X) = T_{n-1}(X).$$

Pour $n \geq 2$, les valeurs de P_n aux bornes étant égales :

$$T_n(1) = (-1)^n P_n(0) = (-1)^n P_n(1) = T_n(0).$$

La suite (T_n) satisfait donc les trois propriétés. Par l'unicité de A.2.(c), $T_n = P_n$, ce qui établit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(X) = (-1)^n P_n(1 - X).$$

(b) Coefficients impairs, puis calcul de r_6 et r_8

Pour $k \geq 1$, l'indice $2k + 1$ est impair et au moins égal à 3. La symétrie donne $P_{2k+1}(0) = -P_{2k+1}(1)$, tandis que la propriété (3) donne l'égalité de ces deux valeurs. Elles sont donc nulles :

$$r_{2k+1} = P_{2k+1}(0) = 0.$$

Cette conclusion ne s'applique pas à $r_1 = -1/2$, car la propriété (3) ne concerne pas P_1 . On dispose notamment de $r_3 = r_5 = r_7 = 0$.

La relation d'indice $n = 7$ donne :

$$r_6 = - \left(\frac{1}{7!} + \frac{r_1}{6!} + \frac{r_2}{5!} + \frac{r_4}{3!} \right) = - \left(\frac{1}{5040} - \frac{1}{1440} + \frac{1}{1440} - \frac{1}{4320} \right) = \frac{1}{30240}.$$

Puis la relation d'indice $n = 9$ donne :

$$r_8 = - \left(\frac{1}{9!} + \frac{r_1}{8!} + \frac{r_2}{7!} + \frac{r_4}{5!} + \frac{r_6}{3!} \right).$$

En remplaçant chaque valeur :

$$r_8 = - \left(\frac{1}{362880} - \frac{1}{80640} + \frac{1}{60480} - \frac{1}{86400} + \frac{1}{181440} \right).$$

Le dénominateur commun 3628800 transforme la parenthèse en :

$$\frac{10 - 45 + 60 - 42 + 20}{3628800} = \frac{3}{3628800} = \frac{1}{1209600}.$$

Ainsi $r_6 = 1/30240$ et $r_8 = -1/1209600$, conformément à la valeur annoncée.

B) Expression de S_{2k}

1. (a) Symétrie de f_k

Fixons $k \geq 2$ et posons $G_k(x) = P_{2k}(x) - r_{2k}$. La symétrie polynomiale de A.3.(a) donne $P_{2k}(1-x) = P_{2k}(x)$, donc $G_k(1-x) = G_k(x)$. La cotangente change de signe sous $x \mapsto 1-x$, comme en I.1.(a). Ainsi :

$$f_k(1-x) = -f_k(x).$$

La courbe admet à nouveau le centre de symétrie $(1/2, 0)$.

(b) Limites aux extrémités

On a $G_k(0) = 0$ et, puisque $P'_{2k} = P_{2k-1}$:

$$G'_k(0) = r_{2k-1} = 0.$$

La dernière égalité utilise $2k - 1 \geq 3$ et A.3.(b). Le polynôme G_k est donc divisible par X^2 : il existe un polynôme réel A_k tel que $G_k(x) = x^2 A_k(x)$. Pour $x \in]0, 1[$:

$$f_k(x) = x A_k(x) H(x), \quad H(x) = x \cot(\pi x).$$

Comme A_k est continu en 0 et $H(x) \rightarrow 1/\pi$, ce produit tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 0^+$. La symétrie donne aussi une limite nulle lorsque $x \rightarrow 1^-$. Le prolongement continu est donc :

$$f_k(0) = f_k(1) = 0.$$

(c) Régularité sur le segment

Sur $]0, 1[$, les fonctions utilisées sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\sin(\pi x) \neq 0$. La dérivée est donc :

$$f'_k(x) = P_{2k-1}(x) \cot(\pi x) - \frac{\pi(P_{2k}(x) - r_{2k})}{\sin^2(\pi x)}.$$

Au voisinage de 0, on utilise plutôt la factorisation $f_k(x) = x A_k(x) H(x)$ de la question précédente. La fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 d'après I.1.(c), et A_k est un polynôme. Leur produit, multiplié par x , est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. Il coïncide avec le prolongement de f_k et :

$$f'_k(0) = A_k(0)H(0) = \frac{A_k(0)}{\pi}.$$

Pour expliciter cette valeur, dérivons deux fois $G_k(x) = x^2 A_k(x)$ en 0. On obtient $G''_k(0) = 2A_k(0)$, tandis que $G''_k = P_{2k-2}$. Ainsi :

$$f'_k(0) = \frac{r_{2k-2}}{2\pi}.$$

Enfin, l'identité $f_k(1-x) = -f_k(x)$ montre que la régularité en 0 se transporte en 1, avec $f'_k(1) = f'_k(0)$ et $f'_k(1-x) = f'_k(x)$ à l'intérieur. Par conséquent :

$$f_k \in \mathcal{C}^1([0, 1]), \quad f'_k(0) = f'_k(1) = \frac{r_{2k-2}}{2\pi}.$$

2. (a) Valeur de $J_p(1)$

Les intégrales définissant $J_p(k)$ et $I_p(k)$ existent pour tout $p \geq 1$ et tout $k \geq 1$, car leurs intégrandes sont continus sur $[0, 1]$. Comme $P_2(x) = h(x) + 1/12$, on a :

$$J_p(1) = I_p + \frac{1}{12} \int_0^1 \cos(2\pi p x) dx.$$

L'intégrale du cosinus est nulle, puisque sa primitive $\sin(2\pi p x)/(2\pi p)$ s'annule aux deux bornes. Par I.3 :

$$J_p(1) = \frac{1}{4\pi^2 p^2}.$$

(b) Relation de récurrence et expressions générales

Fixons $p \geq 1, k \geq 1$ et posons $\omega = 2\pi p$. Une première intégration par parties donne :

$$J_p(k+1) = \left[\frac{P_{2k+2}(x) \sin(\omega x)}{\omega} \right]_0^1 - \frac{1}{\omega} \int_0^1 P_{2k+1}(x) \sin(\omega x) dx.$$

Le terme aux bornes est nul. Pour l'intégrale restante, une deuxième intégration par parties donne :

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x) \sin(\omega x) dx = \left[-\frac{P_{2k+1}(x) \cos(\omega x)}{\omega} \right]_0^1 + \frac{1}{\omega} \int_0^1 P_{2k}(x) \cos(\omega x) dx.$$

Comme $\cos(0) = \cos \omega = 1$ et $P_{2k+1}(1) = P_{2k+1}(0)$, le terme aux bornes est nul. Les intégrations par parties sont licites puisque tous les polynômes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment. Il vient donc :

$$J_p(k+1) = -\frac{J_p(k)}{\omega^2}.$$

La valeur initiale $J_p(1) = 1/\omega^2$ et cette récurrence donnent, par induction :

$$J_p(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi p)^{2k}}.$$

Enfin :

$$I_p(k) = J_p(k) - r_{2k} \int_0^1 \cos(2\pi p x) dx = J_p(k).$$

Ainsi, pour tous $k, p \geq 1$:

$$I_p(k) = J_p(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi p)^{2k}}.$$

3. (a) Deux expressions de la somme finie et passage à la limite

La formule précédente donne immédiatement, pour $n \geq 1$:

$$\sum_{p=1}^n I_p(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} S_{2k}(n).$$

D'autre part, multiplions l'identité trigonométrique de I.4.(a) par $G_k(x)/2$, avec $G_k = P_{2k} - r_{2k}$. Pour $k \geq 2$, le produit $G_k \cot(\pi x)$ est f_k . Pour $k = 1$, c'est également f_1 , puisque $G_1 = h$. L'identité multipliée se prolonge continûment sur $[0, 1]$ dans tous les cas. Par intégration et linéarité d'une somme finie :

$$\sum_{p=1}^n I_p(k) = \frac{1}{2} \int_0^1 f_k(x) \sin(2\pi n x) dx + \frac{1}{2} I_n(k) - \frac{1}{2} \int_0^1 G_k(x) dx.$$

La relation $P'_{2k+1} = P_{2k}$ et la propriété (3), applicable à l'indice $2k + 1 \geq 3$, donnent :

$$\int_0^1 P_{2k}(x) dx = P_{2k+1}(1) - P_{2k+1}(0) = 0.$$

Par conséquent, $\int_0^1 G_k(x) dx = -r_{2k}$. La seconde expression est donc :

$$\sum_{p=1}^n I_p(k) = \frac{1}{2} \int_0^1 f_k(x) \sin(2\pi n x) dx + \frac{1}{2} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi n)^{2k}} + \frac{r_{2k}}{2}.$$

Pour $k \geq 2$, f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ par B.1.(c) ; pour $k = 1$, cette régularité a été établie en I.1.(c). La question I.2 montre donc que l'intégrale tend vers 0. Le terme en n^{-2k} tend également vers 0. Dans la première expression, $S_{2k}(n) \rightarrow S_{2k}$ d'après le préliminaire. En égalant les limites des deux expressions :

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} S_{2k} = \frac{r_{2k}}{2}.$$

Comme $(-1)^{k-1}$ est son propre inverse, on conclut :

$$\forall k \geq 1, \quad S_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k}}{2} r_{2k}.$$

La preuve ne demande aucun échange entre une intégrale et une somme infinie : l'identité est intégrée pour chaque somme finie, puis on passe à la limite dans les deux expressions numériques obtenues.

(b) Valeurs de S_2 , S_4 , S_6 et S_8

Pour $k = 1$, $r_2 = 1/12$, donc :

$$S_2 = \frac{(2\pi)^2}{2} \frac{1}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour $k = 2$, $r_4 = -1/720$, donc :

$$S_4 = -\frac{(2\pi)^4}{2} \left(-\frac{1}{720}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Pour $k = 3$, $r_6 = 1/30240$, donc :

$$S_6 = \frac{(2\pi)^6}{2} \frac{1}{30240} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Pour $k = 4$, $r_8 = -1/1209600$, donc :

$$S_8 = -\frac{(2\pi)^8}{2} \left(-\frac{1}{1209600}\right) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

4. Approximation des sommes

Fixons $k, n \geq 1$ et reprenons $u(p) = 1/((2k-1)p^{2k-1})$. Pour $N \geq n$, sommions les deux inégalités de (0) pour $p = n, \dots, N$:

$$\sum_{p=n}^N \frac{1}{(p+1)^{2k}} \leq u(n) - u(N+1) \leq \sum_{p=n}^N \frac{1}{p^{2k}}.$$

Comme $2k - 1 \geq 1$, $u(N + 1) \rightarrow 0$. La convergence des séries a été établie au préliminaire. En passant à la limite :

$$R_{2k}(n) \leq \frac{1}{(2k - 1)n^{2k-1}} \leq \frac{1}{n^{2k}} + R_{2k}(n).$$

Posons $A_{2k}(n) = S_{2k}(n) + 1/((2k - 1)n^{2k-1})$. Puisque $S_{2k} = S_{2k}(n) + R_{2k}(n)$, on obtient exactement :

$$0 \leq A_{2k}(n) - S_{2k} \leq \frac{1}{n^{2k}}.$$

Pour obtenir une erreur inférieure à 10^{-6} , choisissons respectivement $n = 100$ pour S_4 , $n = 20$ pour S_6 et $n = 10$ pour S_8 . Les bornes correspondantes sont 10^{-8} , $1,5625 \times 10^{-8}$ et 10^{-8} .

Le code suivant calcule ces approximations et les expressions exactes évaluées numériquement :

Python

```
import numpy as np

def approximation(k, n):
    s = 0.0
    for p in range(1, n + 1):
        s = s + 1.0 / p**(2 * k)
    return s + 1.0 / ((2 * k - 1) * n**(2 * k - 1))

print(approximation(2, 100), np.pi**4 / 90)
print(approximation(3, 20), np.pi**6 / 945)
print(approximation(4, 10), np.pi**8 / 9450)
```

Somme	n	$A_{2k}(n)$	Valeur exacte évaluée	Borne de l'erreur
S_4	100	1,082323238678	1,082323233711	10^{-8}
S_6	20	1,017343069407	1,017343061984	$1,5625 \times 10^{-8}$
S_8	10	1,004077360541	1,004077356198	10^{-8}

Les approximations corrigées sont légèrement supérieures aux valeurs exactes, conformément à l'encadrement. Les colonnes numériques sont arrondies ; la borne théorique porte sur $A_{2k}(n)$ avant arrondi et avant les erreurs d'arithmétique flottante.

Pour certifier les valeurs à six décimales à partir des seuls encadrements, les résultats numériques précédents et les bornes d'erreur placent les sommes dans les intervalles suivants, dont les bornes ont été élargies vers l'extérieur :

$$1,082323228677 \leq S_4 \leq 1,082323238679.$$

$$1,017343053781 \leq S_6 \leq 1,017343069408.$$

$$1,004077350540 \leq S_8 \leq 1,004077360542.$$

Ces intervalles se trouvent chacun entièrement dans une même cellule d'arrondi à six décimales. On peut donc donner :

$$S_4 \simeq 1,082323, \quad S_6 \simeq 1,017343, \quad S_8 \simeq 1,004077.$$

Pour chacune de ces trois valeurs décimales, la distance à tout nombre du segment

correspondant est inférieure à 10^{-6} . Elles concordent avec les valeurs $\pi^4/90$, $\pi^6/945$ et $\pi^8/9450$.

Relevé des adaptations

I.1 : définition de la cotangente précisée par le quotient $\cos(\pi x)/\sin(\pi x)$ afin de corriger l'absence de définition de $1/\tan(\pi x)$ en $x = 1/2$. Ce quotient est utilisé dans les questions qui suivent.

I.5.(a) : Question adaptée au programme actuel ; l'algorithme sans langage imposé est rédigé en Python. Il n'y avait pas de code ancien à convertir.

Les autres questions sont conservées. Toutes les démonstrations utilisent les outils réels du programme. Le tracé demandé en I.1.(d) est intégré en SVG dans le corrigé.

Vérifications numériques

Les deux blocs Python ont été exécutés. Les coefficients r_0 à r_8 et les sommes partielles utilisées en II.B.4 ont également été contrôlés par des calculs rationnels exacts ; les intervalles affichés ont été vérifiés à partir de ces sommes. Ces contrôles complètent les démonstrations et ne les remplacent pas.