



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1988

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'objet du problème est d'étudier la convergence d'une suite de polynômes d'interpolation d'une fonction f , ce qui constitue la partie III. Dans la partie I, on construit les polynômes d'interpolation de f ; dans la partie II, on explicite un tel polynôme sur un exemple.

Partie I : Interpolation d'une fonction par un polynôme

Soient n un entier naturel non nul et $(x_1, \dots, x_n)$ une liste de nombres réels distincts. On leur associe les n polynômes $L_1, \dots, L_n$, définis, pour $1 \leq j \leq n$, par

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Lorsque $n = 1$, le produit vide vaut 1.

1. Pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, expliciter le degré et les racines du polynôme L_j . Calculer $L_j(x_j)$.
2. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré strictement inférieur à n . On pose

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j(x).$$

2. a) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, calculer $Q(x_k)$.
2. b) Prouver que $P = Q$.
3. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On suppose que $x_k \in I$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Montrer qu'il existe un polynôme P_f de degré strictement inférieur à n et un seul satisfaisant, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, à $P_f(x_k) = f(x_k)$.

Partie II : Exemples

1. On prend $f(x) = \frac{64}{x+7}$, $I = [0, 36]$, $n = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_3 = 25$.
 1. a) Expliciter les polynômes L_1, L_2, L_3 .
 1. b) Calculer le polynôme P_f défini dans la question I.3. On vérifiera que le polynôme $64P_f$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. On prend $g(x) = \frac{64}{x^2+7}$, $I = [-6, 6]$, $n = 6$, $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$.
 2. a) Sans nouveaux calculs, expliciter le polynôme P_g , défini comme dans la question I.3, à l'aide du polynôme P_f .
 2. b) Étudier la variation de P_g sur l'intervalle $[-6, 6]$.
 2. c) Construire, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, les courbes représentatives de g et de P_g .

Partie III : Étude d'une suite de polynômes d'interpolation

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x + \alpha^2}$, où α est un réel strictement positif.

Les notations étant les mêmes que dans la partie I, les points sont donnés par

$$x_k = \left(\frac{2k-1}{2n} \right)^2 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n.$$

On note P_n le polynôme P_f défini dans la question I.3.

1. Calcul de $f(x) - P_n(x)$

On pose $A(x) = 1 - (x + \alpha^2)P_n(x)$.

1. a) Vérifier que A est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , qui admet $x_1, \dots, x_n$ comme racines.

1. b) On pose

$$Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Montrer qu'il existe un réel c_n tel que, pour tout réel x , $A(x) = c_n Q_n(x)$.

1. c) En prolongeant l'expression $f(x) = \frac{1}{x + \alpha^2}$ aux réels $x \neq -\alpha^2$, prouver que, pour tout réel $x \neq -\alpha^2$,

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(-1)^n Q_n(x)}{(x + \alpha^2) \prod_{k=1}^n (\alpha^2 + x_k)}.$$

2. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(x) = \int_0^1 \ln(x^2 + u^2) du.$$

2. a) Calculer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. b) Vérifier que, pour tout réel strictement positif x , $h'(x) = \pi - 2 \arctan x$.

2. c) Étudier la variation de h . Prouver que h se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

2. d) Montrer qu'il existe un réel α_0 et un seul tel que $0 < \alpha_0 < 1$ et $h(\alpha_0) = 2 \ln 2 - 2$.

2. e) Construire la courbe représentative de h .

3. Détermination d'un équivalent de c_n

3. a) Soient F une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$ et $a \in [0, 1[$. Pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq 1 - a$, on pose

$$G(t) = \int_a^{a+t} F(u) du - tF\left(a + \frac{t}{2}\right).$$

3. a) i. Calculer G' en fonction de F et de F' .

3. a) ii. Soit $x \in [0, 1 - a]$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à F sur l'intervalle $\left[a + \frac{x}{2}, a + x\right]$, établir que

$$|G'(x)| \leq \frac{x^2}{8}M, \quad M = \sup_{t \in [0, 1]} |F''(t)|.$$

3. a) iii. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1 - a]$, $|G(x)| \leq \frac{x^3}{24}M$.

3. b) Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$\left| \ln(\alpha^2 + x_k) - n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\alpha^2 + u^2) du \right| \leq \frac{1 + \alpha^2}{12\alpha^4 n^2}.$$

À cet effet, on appliquera le résultat de la question précédente avec $F(u) = \ln(\alpha^2 + u^2)$, $a = \frac{k-1}{n}$ et $x = \frac{1}{n}$.

3. c) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général

$$a_n = \prod_{k=1}^n (\alpha^2 + x_k).$$

Déduire de 3. b) la limite de la suite $(\ln a_n - nh(\alpha))_{n \geq 1}$. Obtenir enfin un équivalent simple de (a_n) .

4. a) Vérifier que $Q_n(1) = \frac{(4n)!}{2^{4n} n^{2n} (2n)!}$.

4. b) Pour tout $n \geq 1$, on pose $d_n = \ln(n!) + n - (n + \frac{1}{2}) \ln n$.

À l'aide d'un développement limité de $\ln(1+t)$ au voisinage de 0, montrer que la série de terme général $d_{n+1} - d_n$ converge absolument et en déduire que (d_n) converge vers un réel ℓ .

En appliquant ce résultat aux indices $4n$ et $2n$ dans la formule de 4. a), déterminer un équivalent simple de la suite $(Q_n(1))_{n \geq 1}$.

4. c) Déterminer l'ensemble des réels strictement positifs α tels que $(P_n(1))_{n \geq 1}$ converge vers $f(1)$.