



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1988

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I : Interpolation d'une fonction par un polynôme

1. Les dénominateurs $x_j - x_k$ sont non nuls, puisque les points sont distincts. Pour $n \geq 2$, L_j est le produit de $n - 1$ facteurs de degré un, avec un coefficient dominant non nul. Son degré est donc $n - 1$.

Ses racines sont exactement les x_k avec $k \neq j$, chacune de multiplicité un, car ces $n - 1$ nombres sont distincts et épuisent le degré. Au point x_j , chaque facteur vaut 1, donc $L_j(x_j) = 1$.

Pour $n = 1$, le produit vide vaut 1 : L_1 est constant de degré $0 = n - 1$, n'a aucune racine et vaut également 1 en x_1 .

Ainsi, pour tous $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $L_j(x_k) = 1$ si $j = k$ et $L_j(x_k) = 0$ sinon.

2. a) En évaluant la somme en x_k , toutes les contributions sont nulles sauf celle d'indice k :

$$Q(x_k) = \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j(x_k) = P(x_k).$$

Le polynôme Q prend donc les mêmes valeurs que P aux n points prescrits.

2. b) Chaque L_j a un degré inférieur à n , donc Q et $P - Q$ aussi, sauf si ce dernier est nul, auquel cas la conclusion est déjà acquise.

D'après 2. a), $P - Q$ s'annule aux n points distincts $x_1, \dots, x_n$. Un polynôme non nul de degré inférieur à n ne peut pas avoir n racines distinctes. Par conséquent, $P - Q$ est nul et $P = Q$.

3. Méthode 1 — Construction explicite et unicité par les racines

La fonction f est définie aux points x_j . Posons

$$P_f(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) L_j(x).$$

Cette somme est un polynôme réel de degré au plus $n - 1$ et vérifie, par la propriété de 1,

$$P_f(x_k) = \sum_{j=1}^n f(x_j) L_j(x_k) = f(x_k).$$

Il existe donc un polynôme convenable. Si deux polynômes P et R de degré inférieur à n satisfaisaient les mêmes conditions, leur différence aurait les n racines distinctes x_k et un degré inférieur à n . Elle serait nulle, donc $P = R$. Le polynôme construit est unique.

Méthode 2 — Application linéaire d'évaluation

Considérons l'application $T : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par $T(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n))$. Elle est linéaire, et les deux espaces ont dimension n .

Si $T(P) = 0$, P a n racines distinctes et un degré au plus $n - 1$, donc $P = 0$. Le noyau de T est nul; le théorème du rang donne alors un rang égal à n . L'application est ainsi bijective.

La liste réelle $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ possède donc un unique antécédent P_f . De plus, les images des L_j sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, d'où la même formule

$$P_f = \sum_{j=1}^n f(x_j) L_j.$$

La première méthode fournit immédiatement une formule; la seconde présente l'interpolation comme un système linéaire possédant une solution unique. La continuité de f , bien que satisfaite dans l'énoncé, n'est pas nécessaire à cette construction à partir d'un nombre fini de valeurs.

Partie II : Exemples

1. a) En utilisant les trois points 1, 9, 25,

$$L_1(x) = \frac{(x-9)(x-25)}{(1-9)(1-25)} = \frac{(x-9)(x-25)}{192},$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-25)}{(9-1)(9-25)} = -\frac{(x-1)(x-25)}{128},$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-9)}{(25-1)(25-9)} = \frac{(x-1)(x-9)}{384}.$$

Les trois dénominateurs sont non nuls ; ces polynômes sont de degré 2 et possèdent les valeurs d'interpolation attendues.

1. b) Méthode 1 — Formule de Lagrange

Les valeurs de f sont $f(1) = 8$, $f(9) = 4$ et $f(25) = 2$. La question I.3 donne donc

$$\begin{aligned} P_f(x) &= 8L_1(x) + 4L_2(x) + 2L_3(x) \\ &= \frac{8(x-9)(x-25) - 6(x-1)(x-25) + (x-1)(x-9)}{192}. \end{aligned}$$

En développant le numérateur,

$$8(x^2 - 34x + 225) - 6(x^2 - 26x + 25) + (x^2 - 10x + 9) = 3x^2 - 126x + 1659.$$

Par conséquent, $P_f(x) = \frac{x^2 - 42x + 553}{64}$. On a $64P_f(X) = X^2 - 42X + 553$, dont les coefficients sont entiers, comme demandé.

Méthode 2 — Système sur les coefficients

Écrivons $P_f(x) = ax^2 + bx + c$. Les trois conditions d'interpolation donnent

$$a + b + c = 8, \quad 81a + 9b + c = 4, \quad 625a + 25b + c = 2.$$

La différence entre les deux premières égalités, divisée par 8, donne $10a + b = -\frac{1}{2}$. La différence entre les deux dernières, divisée par 16, donne $34a + b = -\frac{1}{8}$.

En soustrayant ces deux nouvelles égalités, $24a = \frac{3}{8}$, donc $a = \frac{1}{64}$. Puis $b = -\frac{1}{2} - \frac{10}{64} = -\frac{42}{64}$, et $c = 8 - a - b = \frac{553}{64}$.

Le système fournit donc le même polynôme et la même propriété de ses coefficients après multiplication par 64. La formule de Lagrange convient à des points quelconques ; le système de coefficients est court ici parce que le degré est seulement 2.

2. a) Méthode 1 — Substitution et unicité

Pour chaque point $x_k \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$, son carré appartient à $\{1, 9, 25\}$ et $g(x_k) = f(x_k^2)$.

Le polynôme $R(x) = P_f(x^2)$ a degré $4 < 6$, et, aux six points prescrits, $R(x_k) = P_f(x_k^2) = f(x_k^2) = g(x_k)$. Par l'unicité de I.3, $P_g = R$.

Ainsi, $P_g(x) = P_f(x^2) = \frac{x^4 - 42x^2 + 553}{64}$, sans recalculer six polynômes de Lagrange.

Méthode 2 — Symétrie des points et parité du polynôme

Le polynôme $x \mapsto P_g(-x)$ a degré inférieur à 6. Comme les points d'interpolation sont symétriques et g est paire, il prend aux six points les mêmes valeurs que g . L'unicité donne $P_g(-x) = P_g(x)$.

Un polynôme pair a des coefficients nuls devant ses puissances impaires : cela résulte de l'égalité des coefficients dans $P_g(-X) = P_g(X)$. Son degré étant au plus 5, il est donc de la forme $P_g(x) = S(x^2)$ avec $\deg S \leq 2$.

Aux points $x = 1, 3, 5$, on obtient $S(1) = 8$, $S(9) = 4$ et $S(25) = 2$. Par l'unicité de l'interpolation à ces trois points, $S = P_f$. On retrouve $P_g(x) = \frac{x^4 - 42x^2 + 553}{64}$.

La première preuve reconnaît directement une solution ; la seconde explique pourquoi la symétrie force une réduction de six conditions à trois conditions sur les carrés.

2. b) Le polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$P'_g(x) = \frac{4x^3 - 84x}{64} = \frac{x(x^2 - 21)}{16}.$$

Ses points critiques dans $[-6, 6]$ sont $-\sqrt{21}$, 0 et $\sqrt{21}$, avec $\sqrt{21} < 6$. Les signes des deux facteurs donnent :

Intervalle	Signe de P'_g	Variation de P_g
$] -6, -\sqrt{21}[$	—	Strictement décroissante
$] -\sqrt{21}, 0[$	+	Strictement croissante
$] 0, \sqrt{21}[$	—	Strictement décroissante
$] \sqrt{21}, 6[$	+	Strictement croissante

Les valeurs qui complètent les variations sont

$$P_g(-6) = P_g(6) = \frac{337}{64}, \quad P_g(-\sqrt{21}) = P_g(\sqrt{21}) = \frac{7}{4}, \quad P_g(0) = \frac{553}{64}.$$

Les minimums globaux sur $[-6, 6]$ sont atteints en $\pm\sqrt{21}$ et valent $\frac{7}{4}$. Le maximum global est atteint uniquement en 0 et vaut $\frac{553}{64}$, puisque cette valeur est supérieure aux

deux valeurs aux extrémités.

2. c) Les deux fonctions sont paires, donc leurs courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. La dérivée $g'(x) = -\frac{128x}{(x^2 + 7)^2}$ montre que g est strictement croissante sur $[-6, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, 6]$.

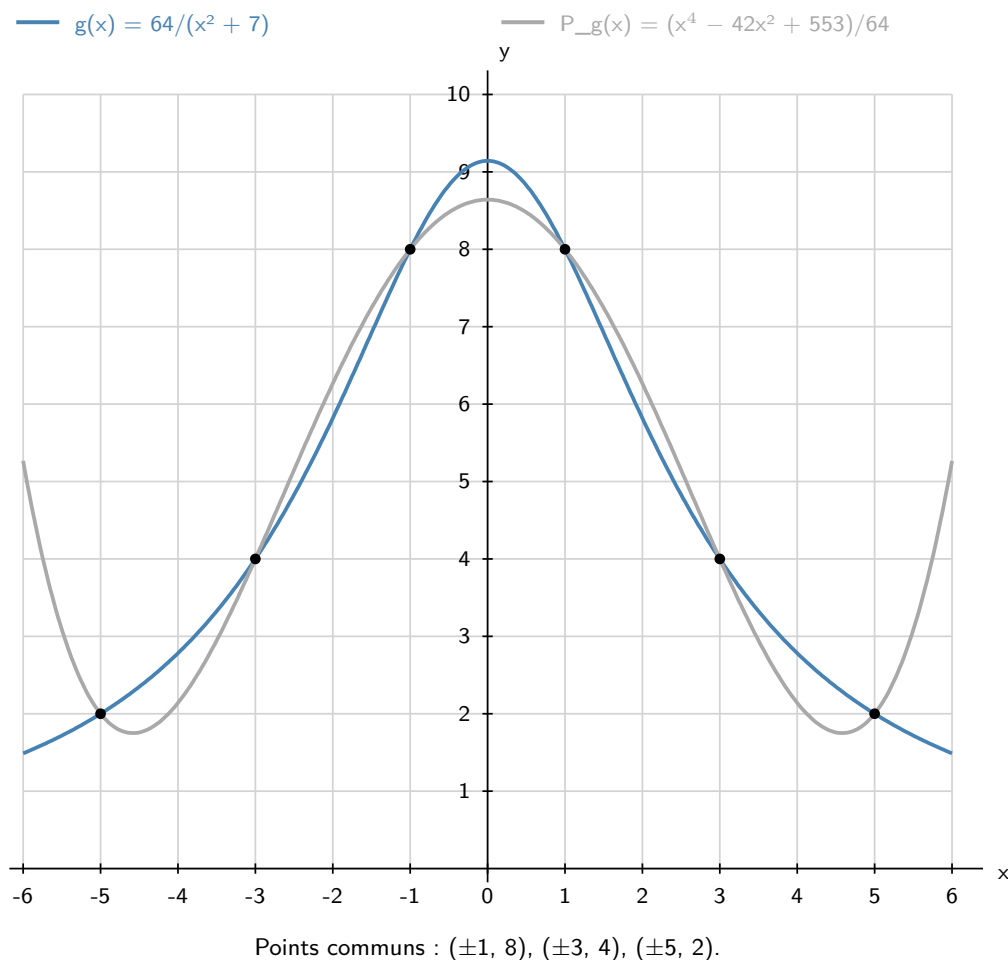
Elle possède un maximum $g(0) = \frac{64}{7}$ et vaut $\frac{64}{43}$ aux extrémités. Les variations de P_g viennent de 2. b). Les courbes passent toutes deux par $(\pm 1, 8)$, $(\pm 3, 4)$ et $(\pm 5, 2)$.

Pour préciser leurs positions relatives, on calcule

$$P_g(x) - g(x) = \frac{(x^2 + 7)(x^4 - 42x^2 + 553) - 4096}{64(x^2 + 7)} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 - 25)}{64(x^2 + 7)}.$$

Le dénominateur est positif. Il s'ensuit que $P_g < g$ lorsque $|x| < 1$ ou $3 < |x| < 5$, et que $P_g > g$ lorsque $1 < |x| < 3$ ou $5 < |x| \leq 6$. Les six points d'interpolation sont exactement les intersections sur l'intervalle.

Le dessin suivant utilise la même longueur pour une unité sur chacun des deux axes. Les points marqués sont les six intersections ; les courbes sont calculées à partir de leurs formules exactes.



Partie III : Étude d'une suite de polynômes d'interpolation

Dans cette partie, $\alpha > 0$. Les points $x_k = ((2k - 1)/(2n))^2$ sont distincts et appartiennent à $]0, 1[$, car les nombres positifs $(2k - 1)/(2n)$ sont strictement croissants et compris entre 0 et 1. La fonction f est continue sur $[0, 1]$, son dénominateur y étant strictement positif. La partie I assure donc l'existence et l'unicité de P_n .

1. a) Comme $\deg P_n \leq n - 1$, le produit $(X + \alpha^2)P_n(X)$ a degré au plus n . Ainsi,

$$A(X) = 1 - (X + \alpha^2)P_n(X) \text{ a degré au plus } n.$$

Pour chaque k , $P_n(x_k) = f(x_k) = \frac{1}{x_k + \alpha^2}$, donc $A(x_k) = 1 - (x_k + \alpha^2) \frac{1}{x_k + \alpha^2} = 0$.

Les n points d'interpolation sont bien des racines de A .

1. b) Les racines x_k sont distinctes. En factorisant successivement par les facteurs $X - x_k$, on voit que

$$Q_n(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$$

divise $A(X)$.

Comme $\deg Q_n = n$ et $\deg A \leq n$, le quotient est constant. Il existe donc $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $A = c_n Q_n$. Ce raisonnement inclurait aussi $A = 0$, mais ici $A(-\alpha^2) = 1$ montre que A et c_n sont non nuls.

1. c) Rectification de l'énoncé : la formule rationnelle n'est définie que pour $x \neq -\alpha^2$. La demande initiale portant sur tous les réels est corrigée par cette exclusion, et l'expression de f est prolongée à ces réels lorsque nécessaire.

Évaluons l'identité polynomiale $A = c_n Q_n$ au point $-\alpha^2$. Cette évaluation est licite, même si f n'est pas définie en ce point, puisque A et Q_n sont des polynômes. On obtient

$$1 = c_n Q_n(-\alpha^2) = c_n (-1)^n \prod_{k=1}^n (\alpha^2 + x_k).$$

Tous les facteurs $\alpha^2 + x_k$ sont strictement positifs. Ainsi,

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^n (\alpha^2 + x_k)}.$$

Pour $x \neq -\alpha^2$, on peut diviser par $x + \alpha^2$:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1 - (x + \alpha^2)P_n(x)}{x + \alpha^2} = \frac{c_n Q_n(x)}{x + \alpha^2} = \frac{(-1)^n Q_n(x)}{(x + \alpha^2) \prod_{k=1}^n (\alpha^2 + x_k)}.$$

Cette égalité vaut en particulier pour tout $x \in [0, 1]$.

2. a) Pour $x > 0$ fixé, la fonction $u \mapsto \ln(x^2 + u^2)$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$. L'intégration par parties sur ce segment, avec la primitive u de 1, donne

$$h(x) = [u \ln(x^2 + u^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2u^2}{x^2 + u^2} du.$$

Comme $\frac{u^2}{x^2 + u^2} = 1 - \frac{x^2}{x^2 + u^2}$,

$$h(x) = \ln(1 + x^2) - 2 + 2x^2 \int_0^1 \frac{du}{x^2 + u^2}.$$

Le changement de variable affine $t = u/x$, licite puisque $x > 0$, donne

$$\int_0^1 \frac{du}{x^2 + u^2} = \frac{1}{x} \int_0^{1/x} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}.$$

Par conséquent,

$$h(x) = \ln(1 + x^2) - 2 + 2x \arctan \frac{1}{x}.$$

2. b) On dérive l'expression explicite de 2. a), sans dériver sous le signe intégral.

Comme $(\arctan(1/x))' = -\frac{1}{1+x^2}$ pour $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + 2 \arctan \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} = 2 \arctan \frac{1}{x}.$$

Pour obtenir la forme demandée, considérons $r(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$ sur $]0, +\infty[$.

Sa dérivée est nulle ; par le théorème des accroissements finis, r est constante. Sa valeur en 1 est $2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ et $h'(x) = \pi - 2 \arctan x$.

2. c) Pour $x > 0$, $0 < \arctan x < \frac{\pi}{2}$, donc $h'(x) > 0$. La fonction h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

L'identité de 2. b) permet de récrire

$$h(x) = \ln(1 + x^2) - 2 + \pi x - 2x \arctan x.$$

Le membre de droite est défini et de classe C^∞ sur tout $\mathbb{R}$, car $1 + x^2 > 0$ et les fonctions logarithme et arctangente sont de classe C^∞ sur leurs domaines. Il donne donc directement un prolongement de classe C^∞ au voisinage de $[0, +\infty[$, dont la valeur en 0 est $h(0) = -2$.

Ce prolongement coïncide avec h pour $x > 0$; il assure en particulier la continuité à droite et la dérivée à droite $h'(0) = \pi$. On a aussi $h''(x) = -\frac{2}{1+x^2} < 0$ sur $[0, +\infty[$, donc le prolongement est strictement concave sur cet intervalle.

Pour la limite à l'infini, l'intégrale initiale donne, pour $x > 0$,

$$h(x) = 2 \ln x + \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{u^2}{x^2} \right) du.$$

La majoration $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ pour $t \geq 0$ implique

$$0 \leq h(x) - 2 \ln x \leq \frac{1}{x^2} \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3x^2}.$$

Donc $h(x) - 2 \ln x \rightarrow 0$ et $h(x) \rightarrow +\infty$. La fonction prolongée croît ainsi de -2 vers $+\infty$.

2. d) Posons $b = 2 \ln 2 - 2$. Comme $\ln 2 > 0$, $h(0) = -2 < b$.

La formule de 2. a) donne $h(1) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $h(1) - b = \frac{\pi}{2} - \ln 2 > 0$: on utilise ici $\ln 2 < 1$ et $\frac{\pi}{2} > 1$.

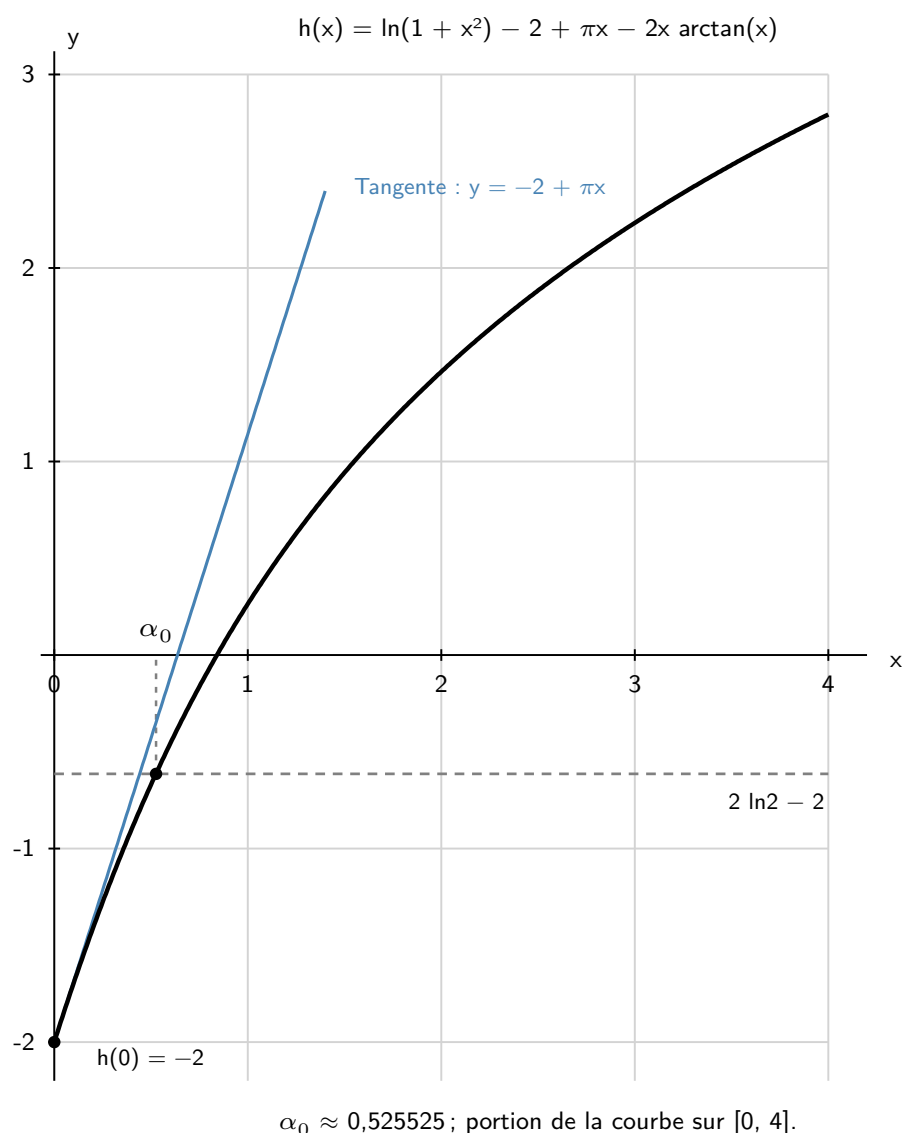
La fonction prolongée est continue sur $[0, 1]$; le théorème des valeurs intermédiaires donne un $\alpha_0 \in]0, 1[$ tel que $h(\alpha_0) = b$. Sa stricte croissance assure l'unicité sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, il existe un unique réel $\alpha_0 \in]0, 1[$ vérifiant $h(\alpha_0) = 2 \ln 2 - 2$.

2. e) La courbe part du point $(0, -2)$ avec la tangente $y = -2 + \pi x$. Elle est strictement croissante et strictement concave, passe par $(1, \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2})$, puis tend vers $+\infty$ avec $h(x) - 2 \ln x \rightarrow 0$ et $h'(x) \rightarrow 0$.

Elle coupe une fois la droite horizontale $y = 2 \ln 2 - 2$, à l'abscisse α_0 . Une dichotomie sur l'expression explicite donne $\alpha_0 \approx 0,525525$; cette valeur est une approximation numérique, tandis que l'existence et l'unicité ont été prouvées en 2. d).

Le dessin montre la courbe sur $[0, 4]$, la tangente en 0 et le niveau qui définit α_0 . Les propriétés précédentes décrivent son prolongement pour $x > 4$.



3. Détermination d'un équivalent de c_n

3. a) Rectification de l'énoncé : la borne supérieure de l'intégrale définissant $G(t)$ est $a + t$, au lieu de $a + 1$. Cette correction respecte le domaine de F et correspond à l'erreur d'approximation par la valeur au milieu de l'intervalle, utilisée dans les questions suivantes.

La continuité de F'' sur le segment $[0, 1]$ assure que $M = \sup_{u \in [0, 1]} |F''(u)|$ est fini. Les calculs de dérivées aux extrémités sont compris de manière unilatérale.

3. a) i. Le théorème fondamental du calcul intégral donne la dérivée de $\int_a^{a+t} F(u) du$:

c'est $F(a+t)$. La règle de dérivation d'un produit donne ensuite

$$G'(t) = F(a+t) - F\left(a + \frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2}F'\left(a + \frac{t}{2}\right).$$

Cette formule est valable à l'intérieur de $[0, 1-a]$ et par continuité avec les dérivées unilatérales aux extrémités.

3. a) ii. Fixons $x \in [0, 1-a]$. Les deux points $a + \frac{x}{2}$ et $a+x$ appartiennent à $[0, 1]$, où F est de classe C^2 .

La formule de Taylor avec reste intégral entre ces deux points donne

$$F(a+x) = F\left(a + \frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}F'\left(a + \frac{x}{2}\right) + \int_{a+x/2}^{a+x} (a+x-u)F''(u) du.$$

En comparant avec 3. a) i., on obtient

$$G'(x) = \int_{a+x/2}^{a+x} (a+x-u)F''(u) du.$$

Sur l'intervalle d'intégration, $a+x-u \geq 0$ et $|F''(u)| \leq M$. Donc

$$|G'(x)| \leq M \int_{a+x/2}^{a+x} (a+x-u) du = M \frac{(x/2)^2}{2} = \frac{x^2}{8} M.$$

Pour $x = 0$, l'intégrale est nulle et l'inégalité reste vraie.

3. a) iii. La définition rectifiée donne $G(0) = 0$. Comme G' est continue sur le segment considéré, pour $x \in [0, 1-a]$,

$$G(x) = \int_0^x G'(t) dt.$$

La majoration précédente et l'inégalité triangulaire pour l'intégrale donnent

$$|G(x)| \leq \int_0^x |G'(t)| dt \leq \frac{M}{8} \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{24} M.$$

La borne demandée est donc établie, y compris pour $x = 0$.

3. b) La fonction $F(u) = \ln(\alpha^2 + u^2)$ est de classe C^2 sur $[0, 1]$, puisque $\alpha > 0$. Ses dérivées sont

$$F'(u) = \frac{2u}{\alpha^2 + u^2}, \quad F''(u) = \frac{2(\alpha^2 - u^2)}{(\alpha^2 + u^2)^2}.$$

Pour $u \in [0, 1]$, $|\alpha^2 - u^2| \leq \alpha^2 + 1$ et $(\alpha^2 + u^2)^2 \geq \alpha^4$. Donc $M \leq \frac{2(1 + \alpha^2)}{\alpha^4}$.

Pour un $k \in \{1, \dots, n\}$, prenons $a = \frac{k-1}{n}$ et $x = \frac{1}{n}$. On a $0 \leq a < 1$, $a + x = \frac{k}{n} \leq 1$, et

$$a + \frac{x}{2} = \frac{2k-1}{2n}, \quad F\left(a + \frac{x}{2}\right) = \ln(\alpha^2 + x_k).$$

La question 3. a) iii. donne alors

$$\left| \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\alpha^2 + u^2) du - \frac{1}{n} \ln(\alpha^2 + x_k) \right| \leq \frac{M}{24n^3}.$$

En multipliant par n puis en majorant M , on obtient exactement

$$\left| \ln(\alpha^2 + x_k) - n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\alpha^2 + u^2) du \right| \leq \frac{1 + \alpha^2}{12\alpha^4 n^2}.$$

3. c) Tous les facteurs de a_n sont positifs, donc

$$\ln a_n = \sum_{k=1}^n \ln(\alpha^2 + x_k).$$

En sommant les n majorations de 3. b), puis en utilisant l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles,

$$|\ln a_n - nh(\alpha)| \leq n \frac{1 + \alpha^2}{12\alpha^4 n^2} = \frac{1 + \alpha^2}{12\alpha^4 n}.$$

Pour $\alpha > 0$ fixé, le membre de droite tend vers 0. Ainsi, $\ln a_n - nh(\alpha) \rightarrow 0$.

Il ne suffit pas de dire $\ln a_n \sim nh(\alpha)$ pour conclure à un équivalent de a_n ; la convergence de la différence vers 0 est ici la propriété déterminante. Par continuité de l'exponentielle,

$$\frac{a_n}{e^{nh(\alpha)}} = \exp(\ln a_n - nh(\alpha)) \rightarrow 1.$$

On a donc $a_n \sim e^{nh(\alpha)}$. D'après 1. c), $c_n = (-1)^n / a_n$, ce qui donne aussi

$$c_n \sim (-1)^n e^{-nh(\alpha)}.$$

Ce dernier équivalent signifie que le quotient tend vers 1; les deux suites comparées sont non nulles, même si elles changent de signe selon la parité de n .

4. a) Pour chaque k ,

$$1 - x_k = \frac{(2n)^2 - (2k-1)^2}{4n^2} = \frac{(2n-2k+1)(2n+2k-1)}{4n^2}.$$

Les premiers facteurs du numérateur, lorsque k varie de 1 à n , sont les nombres impairs de 1 à $2n - 1$, dans l'ordre inverse. Les seconds sont les nombres impairs de $2n + 1$ à $4n - 1$. Ensemble, ils donnent tous les nombres impairs de 1 à $4n - 1$, chacun une fois.

Le produit des nombres pairs de 2 à $4n$ est $2^{2n}(2n)!$. On en déduit que le produit de ces $2n$ nombres impairs est $\frac{(4n)!}{2^{2n}(2n)!}$.

Ainsi,

$$Q_n(1) = \prod_{k=1}^n (1 - x_k) = \frac{(4n)!}{2^{2n}(2n)!} \frac{1}{(4n^2)^n} = \frac{(4n)!}{2^{4n}n^{2n}(2n)!}.$$

Tous les facteurs $1 - x_k$ sont strictement positifs, donc $Q_n(1) > 0$.

4. b) Question adaptée au programme actuel. L'équivalent demandé est établi à partir d'un développement limité et de la convergence absolue d'une série ; aucun équivalent factoriel n'est utilisé comme résultat admis.

Par la définition de d_n et l'égalité $(n+1)! = (n+1)n!$,

$$d_{n+1} - d_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On utilise, pour $t \rightarrow 0$, le développement limité usuel

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4).$$

En multipliant par $\frac{1}{t} + \frac{1}{2}$, on obtient

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+t) = 1 + \frac{t^2}{12} + O(t^3).$$

Avec le changement de variable simple $t = 1/n$, il s'ensuit

$$d_{n+1} - d_n = -\frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Il existe donc un réel $K > 0$ et un rang N tels que $|d_{n+1} - d_n| \leq K/n^2$ pour $n \geq N$. La série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$$

converge ; par comparaison, la série des différences converge absolument.

Comme

$$d_n = d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{k+1} - d_k),$$

la suite (d_n) converge vers un réel ℓ .

On applique maintenant cette seule convergence à la formule de 4. a). Pour tout entier $k \geq 1$, la définition de d_k donne exactement $\ln(k!) = (k + \frac{1}{2}) \ln k - k + d_k$. Ainsi,

$$\ln Q_n(1) = \ln((4n)!) - \ln((2n)!) - 4n \ln 2 - 2n \ln n.$$

En remplaçant les deux logarithmes de factorielles,

$$\begin{aligned} \ln Q_n(1) &= \left(4n + \frac{1}{2}\right) \ln(4n) - 4n - \left(2n + \frac{1}{2}\right) \ln(2n) + 2n - 4n \ln 2 - 2n \ln n + d_{4n} \\ &\quad - d_{2n}. \end{aligned}$$

Les coefficients de $\ln n$ s'annulent, ceux de $\ln 2$ se réduisent à $2n + \frac{1}{2}$, et les termes linéaires donnent $-2n$. Donc

$$\ln Q_n(1) = n(2 \ln 2 - 2) + \frac{1}{2} \ln 2 + d_{4n} - d_{2n}.$$

Comme $d_{4n} \rightarrow \ell$ et $d_{2n} \rightarrow \ell$, leur différence tend vers 0. En exponentiant l'identité,

$$Q_n(1) = \sqrt{2} \left(\frac{4}{e^2} \right)^n \exp(d_{4n} - d_{2n}) \sim \sqrt{2} \left(\frac{4}{e^2} \right)^n.$$

La valeur de ℓ n'est pas nécessaire : elle s'annule dans la différence des deux indices. L'équivalent particulier demandé est donc entièrement démontré.

4. c) Posons $b = 2 \ln 2 - 2$. La formule exacte de 1. c), au point 1, donne

$$f(1) - P_n(1) = \frac{(-1)^n Q_n(1)}{(1 + \alpha^2) a_n}.$$

Les équivalents de 3. c) et de 4. b) donnent, pour $\alpha > 0$ fixé,

$$|f(1) - P_n(1)| \sim \frac{\sqrt{2}}{1 + \alpha^2} \exp(n(b - h(\alpha))).$$

Si $h(\alpha) > b$, alors $b - h(\alpha) < 0$ et ce dernier terme tend vers 0. La suite $(P_n(1))$ converge donc vers $f(1)$.

Si $h(\alpha) < b$, l'erreur en valeur absolue tend vers $+\infty$; la convergence vers $f(1)$ est impossible. Plus précisément, l'erreur a exactement le signe $(-1)^n$, car $Q_n(1)$ et a_n sont positifs. Alors $P_{2n}(1) \rightarrow -\infty$ et $P_{2n+1}(1) \rightarrow +\infty$.

Si $h(\alpha) = b$, l'erreur en valeur absolue tend vers $\frac{\sqrt{2}}{1 + \alpha^2} > 0$. Elle ne tend donc pas vers 0. Dans ce cas, les deux sous-suites ont les limites distinctes

$$P_{2n}(1) \rightarrow \frac{1}{1 + \alpha^2} - \frac{\sqrt{2}}{1 + \alpha^2}, \quad P_{2n+1}(1) \rightarrow \frac{1}{1 + \alpha^2} + \frac{\sqrt{2}}{1 + \alpha^2}.$$

La fonction h est strictement croissante et l'unique solution de $h(\alpha) = b$ est α_0 , d'après 2. d). On a donc $h(\alpha) > b$ exactement lorsque $\alpha > \alpha_0$.

L'ensemble demandé est ainsi $] \alpha_0, +\infty[$, avec $\alpha_0 \approx 0,525525$. La valeur frontière α_0 est exclue.

Relevé des adaptations

III.1) c) : la formule d'erreur, demandée initialement pour tout réel, est restreinte à $x \neq -\alpha^2$; c'est le domaine nécessaire pour que son dénominateur et l'expression de f soient définis. Sur ces réels, l'expression rationnelle de f est explicitement prolongée au-delà de $[0, 1]$.

III.3) a) : la borne supérieure $a + 1$ de l'intégrale de $G(t)$ est rectifiée en $a + t$. La première borne sortirait en général du domaine $[0, 1]$ de F et ne donnerait pas les estimations des questions suivantes. La borne corrigée décrit bien l'erreur de la méthode du point milieu.

III.4) b) : l'équivalent factoriel admis est remplacé par une démonstration élémentaire de la convergence de $d_n = \ln(n!) + n - (n + \frac{1}{2}) \ln n$. La différence $d_{4n} - d_{2n} \rightarrow 0$ suffit à établir l'équivalent de $Q_n(1)$, sans supposer de formule générale hors programme.