



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1987

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel non nul et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N . On considère l'application linéaire f qui, à tout élément U de E , associe le polynôme :

$$f(U)(X) = XU(X) - \frac{1}{N}(X^2 - 1)U'(X),$$

où U' désigne la dérivée de U .

Partie I

1. Étude de l'application f .

1. a) Pour tout entier naturel $j \leq N$, calculer $f(X^j)$.

1. b) Montrer que f est un endomorphisme de E .

1. c) On considère la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^N)$ de E . Écrire la matrice M associée à f dans cette base.

2. Recherche d'une base de polynômes propres pour f .

Soit B un polynôme propre pour f , c'est-à-dire un élément non nul de E tel qu'il existe un réel λ satisfaisant $f(B) = \lambda B$.

2. a) Montrer que B est nécessairement de degré N .

2. b) On suppose $\lambda = 1$. Montrer que -1 est racine de B . Soit k l'ordre de multiplicité de cette racine ; il existe donc un polynôme A tel que :

$$B(X) = (X + 1)^k A(X), \quad A(-1) \neq 0.$$

Montrer que $k = N$ et que A est constant. En supposant $\lambda = -1$, étudier de même la multiplicité de la racine 1.

2. c) On suppose maintenant $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$. Montrer que 1 et -1 sont racines de B .

Soit h et k leurs ordres de multiplicité respectifs. On pose :

$$B(X) = (X - 1)^h (X + 1)^k A(X).$$

Montrer que $h + k = N$. Exprimer alors λ en fonction de k et de N . En déduire une factorisation des polynômes B ainsi obtenus.

2. d) Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

2. e) On considère la famille $\mathcal{B}' = (B_0, \dots, B_N)$ définie par :

$$B_k(X) = (X - 1)^{N-k} (X + 1)^k.$$

Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E . Écrire la matrice M' associée à f dans cette base.

3. Calcul des limites des suites (M^{2n}) et (M^{2n+1}) .

On appelle limite d'une suite (M_n) de matrices carrées d'ordre $N + 1$ la matrice L dont les coefficients sont les limites, si elles existent, des coefficients de M_n lorsque $n \rightarrow +\infty$. On admet que, dans ces conditions, pour toutes matrices fixes P, Q d'ordre $N + 1$, la suite (PM_nQ) a pour limite PLQ .

3. a) Pour tout entier naturel $j \leq N$, on pose :

$$B_j(X) = \sum_{i=0}^N p_{i,j} X^i, \quad X^j = \sum_{i=0}^N q_{i,j} B_i(X).$$

Déterminer $p_{i,0}$ et $p_{i,N}$ pour $0 \leq i \leq N$, puis $q_{0,j}$ et $q_{N,j}$ pour $0 \leq j \leq N$.

3. b) On note respectivement P et Q les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Quels sont les coefficients ainsi connus de P et de Q ?

3. c) Exprimer M en fonction de M', P et Q . En déduire, sans expliciter davantage P et Q , les limites des suites (M^{2n}) et (M^{2n+1}) lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Partie II

On suppose désormais $N \geq 3$. Une urne contient r boules rouges et b boules blanches, avec $r + b = N$. On procède à des tirages selon la règle suivante :

- lorsqu'on obtient une boule rouge, celle-ci est retirée de l'urne et remplacée par une boule blanche avant de passer au tirage suivant ;
- lorsqu'on obtient une boule blanche, celle-ci est retirée de l'urne et remplacée par une boule rouge avant de passer au tirage suivant.

Pour tout entier naturel n , on note X_n le nombre de boules rouges présentes après le n -ième tirage et le remplacement correspondant. En particulier, $X_0 = r$.

Pour tout entier naturel k , on pose $p(n, k) = P(X_n = k)$. Ainsi :

$$p(n, k) = 0 \text{ si } k > N, \quad p(0, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On convient de poser $p(n, -1) = 0$. On désigne par $E(X_n)$ et $V(X_n)$ l'espérance et la variance de X_n .

1. Pour $n \geq 1$, à l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout entier naturel k :

$$Np(n, k) = (N - k + 1)p(n - 1, k - 1) + (k + 1)p(n - 1, k + 1). \quad (1)$$

2. Calcul de l'espérance et de la variance à l'aide de polynômes.

Pour tout entier naturel n , soit F_n le polynôme défini par :

$$F_n(X) = \sum_{k=0}^N p(n, k) X^k.$$

Dans les questions suivantes, on suppose $n \geq 1$.

2. a) Établir la relation $F_n = f(F_{n-1})$. On la note (2).
2. b) Montrer que $F'_n(1) = E(X_n)$. En dérivant (2), former une relation entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$. En déduire $E(X_n)$ et sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.
2. c) Montrer que $F''_n(1) = E(X_n^2) - E(X_n)$. On pose $a_n = E(X_n^2) - NE(X_n)$.

En dérivant deux fois (2), former une relation entre a_n et a_{n-1} . En déduire $V(X_n)$ et sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Calcul de l'espérance et de la variance à l'aide de matrices.

On considère la matrice à $N + 1$ lignes et une colonne :

$$U_n = \begin{pmatrix} p(n, 0) \\ p(n, 1) \\ \vdots \\ p(n, N) \end{pmatrix}.$$

3. a) À l'aide de (1), prouver que $U_n = MU_{n-1}$, où M est la matrice définie en I. 1. c).

On considère les trois matrices à une ligne et $N + 1$ colonnes :

$$J = (1, 1, \dots, 1), \quad K_1 = (0, 1, \dots, N), \quad K_2 = (0^2, 1^2, \dots, N^2).$$

3. b) Calculer $K_1 M$ en fonction de K_1 et de J . Vérifier que $E(X_n) = K_1 U_n$. Retrouver ainsi la relation entre $E(X_n)$ et $E(X_{n-1})$ établie en II. 2. b).
3. c) Calculer $(K_2 - NK_1)M$ en fonction de $K_2 - NK_1$ et de J . Retrouver ainsi la relation entre a_n et a_{n-1} établie en II. 2. c).
4. Étude de la distribution asymptotique de (X_n) .

En utilisant les résultats de la fin de la partie I, déterminer, selon la parité de r , les limites des suites $(p(2n, k))$ et $(p(2n + 1, k))$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.