



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1987

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

Dans cette partie, $N \geq 1$ et $E = \mathbb{R}_N[X]$. Les lignes et colonnes des matrices sont indexées de 0 à N pour correspondre aux puissances de X .

1. a) Images des monômes.

Pour $j = 0$, le polynôme constant 1 a une dérivée nulle, donc $f(1) = X$.

Pour $1 \leq j \leq N$, on utilise $(X^j)' = jX^{j-1}$:

$$f(X^j) = X^{j+1} - \frac{j}{N}(X^2 - 1)X^{j-1} = \frac{N-j}{N}X^{j+1} + \frac{j}{N}X^{j-1}.$$

En particulier, le terme de degré $N+1$ disparaît lorsque $j = N$, et $f(X^N) = X^{N-1}$. La formule pour $j \geq 1$ ne doit pas être employée avec une puissance négative pour $j = 0$.

1. b) Caractère endomorphe.

La dérivation et la multiplication par un polynôme fixé sont linéaires. Ainsi, pour $U, V \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f(aU + bV) = af(U) + bf(V).$$

D'après la question précédente, chaque image d'un monôme de la base $(1, X, \dots, X^N)$ appartient à E : pour $j < N$, son degré est au plus $j+1 \leq N$; pour $j = N$, son degré est $N-1$. Par linéarité, $f(E) \subset E$.

L'application f est donc un endomorphisme de E .

1. c) Matrice dans la base canonique.

La colonne d'indice j de M contient les coordonnées de $f(X^j)$. Les seuls coefficients éventuellement non nuls sont donc :

$$m_{j+1,j} = \frac{N-j}{N} \quad (0 \leq j \leq N-1), \quad m_{j-1,j} = \frac{j}{N} \quad (1 \leq j \leq N).$$

Autrement dit, pour $0 \leq i, j \leq N$,

$$M = (m_{i,j})_{0 \leq i, j \leq N}, \quad m_{i,j} = \begin{cases} \frac{N-j}{N} & \text{si } i = j+1, \\ \frac{j}{N} & \text{si } i = j-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette écriture définit toute la matrice, y compris aux bords. Elle est tridiagonale, avec

diagonale nulle. Par exemple, pour $N = 1$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La somme des coefficients de chaque colonne vaut 1, propriété qui sera utilisée dans la partie probabiliste.

2. a) Degré d'un polynôme propre.

Soit $B \neq 0$ tel que $f(B) = \lambda B$, et posons $m = \deg B$. Si $c_m \neq 0$ est son coefficient dominant, le coefficient de X^{m+1} dans $f(B)$ est :

$$c_m - \frac{m}{N}c_m = c_m \left(1 - \frac{m}{N}\right).$$

Si $m < N$, ce coefficient est non nul ; les autres monômes de B ne peuvent pas contribuer au degré $m+1$. Ainsi $f(B)$ serait de degré $m+1$, tandis que λB est de degré au plus m , même lorsque $\lambda = 0$. C'est impossible.

Comme $B \in E$, on a $m \leq N$. Par conséquent, $\deg B = N$.

2. b) Valeurs propres 1 et -1 .

L'équation propre s'écrit :

$$(X - \lambda)B(X) - \frac{1}{N}(X^2 - 1)B'(X) = 0. \quad (*)$$

En l'évaluant en 1 et -1 , on obtient respectivement :

$$(1 - \lambda)B(1) = 0, \quad (-1 - \lambda)B(-1) = 0.$$

Supposons d'abord $\lambda = 1$. La seconde égalité donne $B(-1) = 0$. Il existe donc $k \geq 1$ et un polynôme A tel que $B = (X + 1)^k A$ et $A(-1) \neq 0$.

En remplaçant B et sa dérivée dans (*), puis en factorisant $(X + 1)^k$, on obtient l'identité polynomiale :

$$(X - \lambda)A - \frac{k}{N}(X - 1)A - \frac{1}{N}(X^2 - 1)A' = 0.$$

La simplification du facteur $(X + 1)^k$ est une simplification de polynômes, et ne suppose pas que $X + 1$ soit non nul pour chaque valeur de X . On peut donc évaluer l'identité obtenue en -1 :

$$\left(-1 - \lambda + \frac{2k}{N}\right) A(-1) = 0.$$

Puisque $A(-1) \neq 0$ et $\lambda = 1$, on en déduit $k = N$. D'après 2. a), $\deg B = N$, donc $\deg A = 0$. Ainsi :

$$B = c(X + 1)^N, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Supposons maintenant $\lambda = -1$. La première égalité donne $B(1) = 0$. Écrivons $B = (X - 1)^h C$ avec $h \geq 1$ et $C(1) \neq 0$. La même substitution dans (*), suivie de la simplification du facteur $(X - 1)^h$, donne :

$$(X - \lambda)C - \frac{h}{N}(X + 1)C - \frac{1}{N}(X^2 - 1)C' = 0.$$

En $X = 1$, il vient :

$$\left(1 - \lambda - \frac{2h}{N}\right) C(1) = 0.$$

Avec $\lambda = -1$, on obtient $h = N$, puis C constant non nul. Les polynômes propres correspondants sont donc exactement :

$$B = c(X - 1)^N, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. c) Autres valeurs propres et factorisation.

Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$, les évaluations de (*) donnent $B(1) = B(-1) = 0$. Notons $h \geq 1$ et $k \geq 1$ les multiplicités respectives de ces deux racines. Alors :

$$B = (X - 1)^h (X + 1)^k A, \quad A(1) \neq 0, \quad A(-1) \neq 0.$$

On reprend les calculs locaux de la question précédente. Pour la racine 1, le facteur résiduel $(X + 1)^k A$ est non nul en 1 ; pour la racine -1 , le facteur résiduel $(X - 1)^h A$ est non nul en -1 . Les mêmes évaluations donnent donc :

$$\lambda = 1 - \frac{2h}{N}, \quad \lambda = -1 + \frac{2k}{N}.$$

En égalant ces deux expressions,

$$1 - \frac{2h}{N} = -1 + \frac{2k}{N} \implies h + k = N.$$

Puisque $\deg B = N$, le polynôme A est constant non nul. En conséquence :

$$\lambda = \frac{2k}{N} - 1, \quad B = c(X - 1)^{N-k} (X + 1)^k, \quad 1 \leq k \leq N - 1, \quad c \neq 0.$$

Pour $N = 1$, il n'existe aucun entier k dans cet intervalle : les seules valeurs propres possibles sont alors -1 et 1 . La vérification que tous les polynômes ainsi décrits sont effectivement propres est donnée à la question suivante.

2. d) Diagonalisation de f .

Il faut vérifier l'existence des vecteurs propres obtenus, puis utiliser leurs valeurs propres distinctes. Pour $0 \leq k \leq N$, posons :

$$B_k = (X - 1)^{N-k} (X + 1)^k.$$

Ce polynôme est non nul et de degré N . La règle de dérivation d'un produit donne l'identité :

$$(X^2 - 1)B'_k = ((N - k)(X + 1) + k(X - 1))B_k = (NX + N - 2k)B_k.$$

Lorsque $k = 0$ ou $k = N$, on dérive seulement le facteur de puissance positive ; l'identité reste valable et ne nécessite aucune puissance négative. On en déduit :

$$f(B_k) = XB_k - \frac{NX + N - 2k}{N} B_k = \left(\frac{2k}{N} - 1 \right) B_k.$$

Les $N + 1$ nombres $\lambda_k = 2k/N - 1$ sont réels et deux à deux distincts, puisque $N > 0$.
Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.
Cette famille comprend $N + 1 = \dim E$ éléments : c'est une base de E .

Il existe donc une base de vecteurs propres réels pour f ; l'endomorphisme f est diagonalisable.

2. e) Base $\mathcal{B}'$ et matrice M' .

Méthode 1 — Utiliser les valeurs propres distinctes.

La question 2. d) établit que chaque B_k est propre pour $\lambda_k = 2k/N - 1$ et que ces valeurs sont distinctes. Par indépendance des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, la famille $\mathcal{B}' = (B_0, \dots, B_N)$ est libre. Comme elle contient $N + 1$ éléments dans E , de dimension $N + 1$, elle est une base.

Dans cette base, $f(B_k) = \lambda_k B_k$, donc :

$$M' = \text{diag} \left(-1, -1 + \frac{2}{N}, -1 + \frac{4}{N}, \dots, 1 \right) = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_N).$$

Méthode 2 — Utiliser les multiplicités en 1.

On peut prouver directement que la famille est libre, sans critère spectral. Supposons qu'une combinaison

$$\sum_{k=0}^N c_k B_k$$

soit nulle et qu'au moins un coefficient soit non nul. Soit m le plus grand indice tel que $c_m \neq 0$.

Chaque terme de cette combinaison est divisible par $(X - 1)^{N-m}$. Après simplification de ce facteur, l'identité devient :

$$\sum_{k=0}^m c_k (X - 1)^{m-k} (X + 1)^k = 0.$$

En évaluant en 1, tous les termes d'indice $k < m$ s'annulent, et il reste $c_m 2^m = 0$. Cela contredit $c_m \neq 0$. Tous les coefficients sont donc nuls : la famille est libre, puis est une base par sa cardinalité.

Le calcul de $f(B_k)$ effectué en 2. d) fournit alors la même matrice diagonale M' . La première méthode réutilise la structure spectrale ; la seconde exploite directement les ordres d'annulation des polynômes.

3. a) Coefficients utiles des changements de base.

La formule du binôme donne :

$$B_0(X) = (X - 1)^N = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (-1)^{N-i} X^i, \quad B_N(X) = (X + 1)^N = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} X^i.$$

On obtient ainsi, pour $0 \leq i \leq N$:

$$p_{i,0} = (-1)^{N-i} \binom{N}{i}, \quad p_{i,N} = \binom{N}{i}.$$

Pour calculer $q_{0,j}$ et $q_{N,j}$, on évalue la décomposition

$$X^j = \sum_{i=0}^N q_{i,j} B_i(X)$$

aux racines communes des autres termes.

En $X = -1$, seul le terme d'indice 0 subsiste, car $B_i(-1) = 0$ pour $i \geq 1$ et $B_0(-1) = (-2)^N$. Par conséquent :

$$(-1)^j = q_{0,j}(-2)^N \implies q_{0,j} = \frac{(-1)^{N+j}}{2^N}.$$

En $X = 1$, seul le terme d'indice N subsiste, car $B_i(1) = 0$ pour $i < N$ et $B_N(1) = 2^N$.

Ainsi :

$$1 = q_{N,j}2^N \implies q_{N,j} = \frac{1}{2^N}.$$

Les deux dénominateurs sont non nuls. Ces expressions valent pour tous les indices demandés, y compris $j = 0$.

3. b) Parties connues de P et Q .

Par définition de la matrice de passage, la colonne d'indice j de P est constituée des coordonnées de B_j dans $\mathcal{B}$. Ainsi $P = (p_{i,j})$. De même, la colonne d'indice j de Q contient les coordonnées de X^j dans $\mathcal{B}'$, donc $Q = (q_{i,j})$.

Les deux familles étant des bases, ces matrices sont inversibles et $Q = P^{-1}$. La question précédente donne entièrement les première et dernière colonnes de P , ainsi que les première et dernière lignes de Q :

$$P_{i,0} = (-1)^{N-i} \binom{N}{i}, \quad P_{i,N} = \binom{N}{i}, \quad Q_{0,j} = \frac{(-1)^{N+j}}{2^N}, \quad Q_{N,j} = \frac{1}{2^N}.$$

3. c) Limites des puissances paires et impaires.

Pour tout $U \in E$, les coordonnées dans les deux bases satisfont $[U]_{\mathcal{B}} = P[U]_{\mathcal{B}'}$.

Appliquée à $f(U)$, cette relation donne $MP = PM'$. Comme $Q = P^{-1}$, il vient :

$$M = PM'Q.$$

En utilisant $QP = I_{N+1}$, une récurrence fournit $M^\ell = P(M')^\ell Q$ pour tout entier $\ell \geq 0$.

Les valeurs propres extrêmes sont $\lambda_0 = -1$ et $\lambda_N = 1$. Pour $1 \leq k \leq N-1$, on a $-1 < \lambda_k < 1$, donc $\lambda_k^{2n} \rightarrow 0$ et $\lambda_k^{2n+1} \rightarrow 0$. Il en résulte :

$$(M')^{2n} \longrightarrow D_+ = \text{diag}(1, 0, \dots, 0, 1), \quad (M')^{2n+1} \longrightarrow D_- = \text{diag}(-1, 0, \dots, 0, 1).$$

Lorsque $N = 1$, il n'y a pas de terme intermédiaire : $D_+ = I_2$ et $D_- = \text{diag}(-1, 1)$. Le raisonnement demeure valable.

On utilise le résultat admis dans l'énoncé : si les coefficients d'une suite de matrices A_n convergent vers ceux de A , alors, pour des matrices fixes P, Q , ceux de PA_nQ convergent vers ceux de PAQ . Il permet de conclure :

$$M^{2n} \longrightarrow L_+ = PD_+Q, \quad M^{2n+1} \longrightarrow L_- = PD_-Q.$$

Pour obtenir tous les coefficients, seuls les indices 0 et N interviennent :

$$(L_+)_{i,j} = p_{i,0}q_{0,j} + p_{i,N}q_{N,j} = \frac{\binom{N}{i}}{2^N} (1 + (-1)^{i+j}),$$

$$(L_-)_{i,j} = -p_{i,0}q_{0,j} + p_{i,N}q_{N,j} = \frac{\binom{N}{i}}{2^N} (1 - (-1)^{i+j}).$$

En effet, $(-1)^{N-i}(-1)^{N+j} = (-1)^{i+j}$. Ces deux formules, pour $0 \leq i, j \leq N$, déterminent les matrices limites sans calculer les autres coefficients de P ou Q .

Partie II

On suppose désormais $N \geq 3$. Pour tout $n \geq 0$, X_n prend ses valeurs dans $\{0, \dots, N\}$. Toutes ses puissances ont donc une espérance finie ; en particulier, son espérance et sa variance existent. On notera $e_n = E(X_n)$ et $s_n = E(X_n^2)$.

1. Relation entre les probabilités.

Les événements $(X_{n-1} = j)$, pour $0 \leq j \leq N$, forment un système complet d'événements. Lorsque l'urne contient j boules rouges avant le tirage, elle en contient ensuite :

- $j - 1$ si une boule rouge est tirée, avec probabilité j/N ;
- $j + 1$ si une boule blanche est tirée, avec probabilité $(N - j)/N$.

Les tirages sont uniformes parmi les N boules. Les probabilités des événements conjoints correspondants sont donc $(j/N)p(n - 1, j)$ et $((N - j)/N)p(n - 1, j)$; si $p(n - 1, j) = 0$, ces deux probabilités sont simplement nulles, sans avoir à conditionner sur un événement de probabilité nulle.

Pour arriver à k , il faut ainsi partir de $k - 1$ et tirer une boule blanche, ou partir de $k + 1$ et tirer une boule rouge. La formule des probabilités totales donne, pour $0 \leq k \leq N$:

$$p(n, k) = \frac{N - k + 1}{N} p(n - 1, k - 1) + \frac{k + 1}{N} p(n - 1, k + 1).$$

La convention $p(n - 1, -1) = 0$ traite $k = 0$; celle donnant une probabilité nulle au-delà de N traite $k = N$. Pour $k = N + 1$, le coefficient du premier terme est nul et le second terme est nul. Pour $k \geq N + 2$, les deux probabilités du membre de droite sont nulles. L'identité est donc valable pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Np(n, k) = (N - k + 1)p(n - 1, k - 1) + (k + 1)p(n - 1, k + 1).$$

2. a) Récurrence polynomiale.

Par linéarité et par I. 1. a),

$$f(F_{n-1}) = p(n - 1, 0)X + \sum_{j=1}^N p(n - 1, j) \left(\frac{N - j}{N} X^{j+1} + \frac{j}{N} X^{j-1} \right).$$

Il n'existe pas de terme en X^{N+1} , car son coefficient contient $N - N = 0$. Pour $0 \leq k \leq N$, le coefficient de X^k est :

$$\frac{N - k + 1}{N} p(n - 1, k - 1) + \frac{k + 1}{N} p(n - 1, k + 1) = p(n, k).$$

On utilise les mêmes conventions aux bords que dans la question précédente. Les coefficients de $f(F_{n-1})$ et de F_n sont donc égaux, d'où :

$$F_n = f(F_{n-1}) = XF_{n-1} - \frac{1}{N}(X^2 - 1)F'_{n-1}.$$

Enfin, la loi initiale donne $F_0(X) = X^r$, et la somme des probabilités donne $F_n(1) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

2. b) Espérance et limite.

Méthode 1 — Dériver la récurrence polynomiale.

Comme la somme définissant F_n est finie, on peut dériver terme à terme :

$$F'_n(1) = \sum_{k=1}^N kp(n, k) = E(X_n) = e_n.$$

La dérivation de la relation de 2. a) donne :

$$F'_n = F'_{n-1} + \left(1 - \frac{2}{N}\right) XF'_{n-1} - \frac{1}{N}(X^2 - 1)F''_{n-1}.$$

En évaluant en 1 et en utilisant $F_{n-1}(1) = 1$, on obtient :

$$e_n = 1 + \alpha e_{n-1}, \quad \alpha = 1 - \frac{2}{N}.$$

Le réel $N/2$ est un point fixe de cette récurrence, car $1 + \alpha N/2 = N/2$. Par conséquent :

$$e_n - \frac{N}{2} = \alpha \left(e_{n-1} - \frac{N}{2}\right).$$

Avec $e_0 = r$, la suite ainsi centrée est géométrique et :

$$E(X_n) = \frac{N}{2} + \left(r - \frac{N}{2}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n, \quad n \geq 0.$$

Puisque $N \geq 3$, $0 < \alpha < 1$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = N/2$.

Méthode 2 — Calculer à partir d'un tirage.

À partir d'une composition contenant j boules rouges, l'espérance du nombre de boules rouges après le tirage vaut :

$$(j-1)\frac{j}{N} + (j+1)\frac{N-j}{N} = j + 1 - \frac{2j}{N} = 1 + \alpha j.$$

Les facteurs j/N ou $(N-j)/N$ annulent les transitions impossibles aux bords $j = 0, N$. En sommant les contributions suivant les événements $(X_{n-1} = j)$, on obtient :

$$e_n = \sum_{j=0}^N (1 + \alpha j) p(n-1, j) = 1 + \alpha e_{n-1}.$$

Le même centrage donne $e_n - N/2 = \alpha^n(r - N/2)$ et la même limite. Cette seconde méthode retrouve la récurrence directement à partir de l'expérience aléatoire, tandis que la première suit la méthode polynomiale demandée.

2. c) Variance et limite.

Méthode 1 — Dériver deux fois la récurrence polynomiale.

La dérivée seconde d'une somme finie fournit :

$$F_n''(1) = \sum_{k=2}^N k(k-1)p(n, k) = E(X_n^2) - E(X_n) = s_n - e_n.$$

En dérivant de nouveau l'expression de F_n' obtenue en 2. b), on a :

$$F_n'' = \left(2 - \frac{2}{N}\right) F_{n-1}' + \left(1 - \frac{4}{N}\right) X F_{n-1}'' - \frac{1}{N} (X^2 - 1) F_{n-1}'''.$$

Posons $\beta = 1 - 4/N$. L'évaluation en 1 donne :

$$s_n - e_n = \left(2 - \frac{2}{N}\right) e_{n-1} + \beta(s_{n-1} - e_{n-1}).$$

Le coefficient de e_{n-1} dans le membre de droite, après regroupement, est $1 + 2/N$. Avec $e_n = 1 + \alpha e_{n-1}$, on en déduit :

$$s_n = \beta s_{n-1} + \left(1 + \frac{2}{N} + \alpha\right) e_{n-1} + 1 = \beta s_{n-1} + 2e_{n-1} + 1.$$

Pour $a_n = s_n - Ne_n$, il vient alors :

$$a_n = \beta s_{n-1} + 2e_{n-1} + 1 - N(1 + \alpha e_{n-1}).$$

Comme $2 - N\alpha = 4 - N = -N\beta$, cela devient :

$$a_n = \beta(s_{n-1} - Ne_{n-1}) - (N - 1) = \beta a_{n-1} - (N - 1).$$

Le point fixe est $a_* = -N(N - 1)/4$, puisque $(1 - \beta)a_* = -(N - 1)$ et $1 - \beta = 4/N > 0$.

La relation $a_n - a_* = \beta(a_{n-1} - a_*)$, avec $a_0 = r^2 - Nr$, donne :

$$a_n = -\frac{N(N - 1)}{4} + \left(r^2 - Nr + \frac{N(N - 1)}{4}\right) \beta^n.$$

Posons $d = r - N/2$. Comme $r^2 - Nr + N(N - 1)/4 = d^2 - N/4$, on peut écrire, pour $n \geq 1$:

$$a_n = -\frac{N(N - 1)}{4} + \left(d^2 - \frac{N}{4}\right) \beta^n.$$

La formule de Huygens donne $V(X_n) = s_n - e_n^2 = a_n + Ne_n - e_n^2$. Avec $e_n = N/2 + d\alpha^n$,

$$Ne_n - e_n^2 = N\left(\frac{N}{2} + d\alpha^n\right) - \left(\frac{N}{2} + d\alpha^n\right)^2 = \frac{N^2}{4} - d^2\alpha^{2n}.$$

On obtient donc :

$$V(X_n) = \frac{N}{4} + \left(\left(r - \frac{N}{2}\right)^2 - \frac{N}{4}\right) \left(1 - \frac{4}{N}\right)^n - \left(r - \frac{N}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2n}, \quad n \geq 1.$$

La variance initiale est $V(X_0) = 0$ puisque $X_0 = r$ est constante. Cela traite séparément $n = 0$, sans convention sur 0^0 lorsque $N = 4$.

Pour $N \geq 3$, $|\beta| < 1$ et $0 < \alpha < 1$. Les deux termes géométriques tendent donc vers zéro et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = \frac{N}{4}.$$

Pour $N = 3$, $\beta = -1/3$: le terme correspondant alterne de signe, mais converge vers zéro. Pour $N = 4$, $\beta = 0$: ce terme est nul dès $n = 1$. Les formules couvrent également les compositions initiales $r = 0$ et $r = N$.

Méthode 2 — Calculer le second moment à partir d'un tirage.

Cette approche utilise directement les deux transitions possibles de l'urne, plutôt que les dérivées des polynômes. Lorsque le nombre de boules rouges avant le tirage est j , la moyenne du carré du nombre obtenu est :

$$(j-1)^2 \frac{j}{N} + (j+1)^2 \frac{N-j}{N} = j^2 + \frac{2j(N-2j)}{N} + 1 = \beta j^2 + 2j + 1.$$

En multipliant par $p(n-1, j)$ et en sommant pour $0 \leq j \leq N$, les probabilités totales donnent :

$$s_n = \beta s_{n-1} + 2e_{n-1} + 1.$$

Avec $e_n = 1 + \alpha e_{n-1}$, on en déduit :

$$a_n = s_n - N e_n = \beta s_{n-1} + (2 - N\alpha) e_{n-1} - (N-1) = \beta a_{n-1} - (N-1).$$

En ajoutant $N(N-1)/4$ des deux côtés, on obtient une suite géométrique :

$$a_n + \frac{N(N-1)}{4} = \beta \left(a_{n-1} + \frac{N(N-1)}{4} \right).$$

Son terme initial est $r^2 - Nr + N(N-1)/4 = d^2 - N/4$. Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$a_n = -\frac{N(N-1)}{4} + \left(d^2 - \frac{N}{4}\right) \beta^n.$$

Enfin, $e_n = N/2 + d\alpha^n$ et la formule de Huygens donnent :

$$V(X_n) = a_n + Ne_n - e_n^2 = \frac{N}{4} + \left(d^2 - \frac{N}{4}\right) \beta^n - d^2 \alpha^{2n}.$$

Puisque $|\beta| < 1$ et $0 < \alpha < 1$, la variance converge vers $N/4$. Le terme initial reste $V(X_0) = 0$; pour $N = 4$, la puissance β^n est nulle pour tout $n \geq 1$. On retrouve donc le résultat avec une méthode fondée exclusivement sur les probabilités des transitions.

3. a) Récurrence matricielle.

Pour $0 \leq k \leq N$, les seuls coefficients utiles de la ligne d'indice k de M sont ceux des colonnes $k-1$ et $k+1$, lorsqu'elles existent. D'après I. 1. c),

$$(MU_{n-1})_k = \frac{N-k+1}{N} p(n-1, k-1) + \frac{k+1}{N} p(n-1, k+1) = p(n, k).$$

Aux bords, on omet les colonnes inexistantes, ce qui équivaut aux conventions de II. 1. Ainsi :

$$U_n = MU_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

En notant ε_r le vecteur canonique dont la composante d'indice r vaut 1, la loi initiale donne $U_0 = \varepsilon_r$. Une récurrence fournit alors :

$$U_n = M^n \varepsilon_r \quad (n \geq 0).$$

Les lignes J, K_1, K_2 définies dans l'énoncé vérifient, par leur produit avec la colonne des probabilités :

$$JU_n = 1, \quad K_1 U_n = e_n, \quad K_2 U_n = s_n.$$

3. b) Espérance par calcul matriciel.

Pour $0 \leq j \leq N$, la composante d'indice j de $K_1 M$ est la somme des indices de ligne pondérés par les coefficients de la colonne j :

$$(K_1 M)_j = (j-1) \frac{j}{N} + (j+1) \frac{N-j}{N} = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right) j.$$

Pour $j = 0$ ou $j = N$, le terme correspondant à une ligne inexistante est omis ; son coefficient formel est nul, donc la formule reste valable. En posant $\alpha = 1 - 2/N$, on conclut :

$$K_1 M = \alpha K_1 + J.$$

Par définition du produit matriciel,

$$K_1 U_n = \sum_{j=0}^N j p(n, j) = E(X_n).$$

En multipliant la récurrence $U_n = M U_{n-1}$ à gauche par K_1 , on obtient :

$$e_n = K_1 M U_{n-1} = (\alpha K_1 + J) U_{n-1} = \alpha e_{n-1} + 1.$$

On retrouve donc la récurrence de II. 2. b), et par le même centrage :

$$e_n = \frac{N}{2} + \left(r - \frac{N}{2}\right) \alpha^n, \quad e_n \longrightarrow \frac{N}{2}.$$

3. c) Récurrence de a_n par calcul matriciel.

Calculons d'abord $K_2 M$. Pour chaque colonne d'indice j ,

$$(K_2 M)_j = (j-1)^2 \frac{j}{N} + (j+1)^2 \frac{N-j}{N}.$$

En développant les carrés et en regroupant,

$$(K_2 M)_j = j^2 + \frac{2j(N-2j)}{N} + 1 = \left(1 - \frac{4}{N}\right) j^2 + 2j + 1.$$

Comme à la question précédente, les coefficients nuls traitent les bords. Avec $\beta = 1 - 4/N$, on a donc :

$$K_2 M = \beta K_2 + 2K_1 + J.$$

En soustrayant $NK_1 M = N\alpha K_1 + NJ$ et en utilisant $2 - N\alpha = -N\beta$, il vient :

$$(K_2 - NK_1)M = \beta K_2 + (2 - N\alpha)K_1 - (N - 1)J = \beta(K_2 - NK_1) - (N - 1)J.$$

Or $(K_2 - NK_1)U_n = s_n - Ne_n = a_n$ et $JU_{n-1} = 1$. Ainsi :

$$a_n = (K_2 - NK_1)MU_{n-1} = \beta a_{n-1} - (N - 1).$$

On retrouve exactement la récurrence de II. 2. c). Avec $a_0 = r^2 - Nr$, elle conduit à la même expression de a_n , puis à la même variance et à la limite $N/4$.

4. Distributions asymptotiques suivant la parité.

La relation $U_n = M^n \varepsilon_r$ montre que $p(n, k)$ est le coefficient de ligne k et de colonne r de M^n , pour $0 \leq k \leq N$. On applique donc les limites de I. 3. c) avec $i = k$ et $j = r$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(2n, k) = \frac{\binom{N}{k}}{2^N} (1 + (-1)^{k+r}),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(2n + 1, k) = \frac{\binom{N}{k}}{2^N} (1 - (-1)^{k+r}).$$

Pour $k > N$, les deux limites sont nulles puisque toutes les probabilités considérées le sont.

Pour détailler la dépendance à la parité de r , posons $w_k = 2^{1-N} \binom{N}{k}$, pour $0 \leq k \leq N$. Les résultats sont :

Parité de r	Parité de k	Limite de $p(2n, k)$	Limite de $p(2n + 1, k)$
Paire	Paire	w_k	0
Paire	Impaire	0	w_k
Impaire	Paire	0	w_k
Impaire	Impaire	w_k	0

À chaque tirage, le nombre de boules rouges augmente ou diminue de 1. Ainsi, par récurrence, $X_n \equiv r + n \pmod{2}$. Cette propriété explique les probabilités nulles dans le tableau.

Vérifions que les probabilités limites sont normalisées. La formule du binôme donne :

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^N, \quad \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} = (1 - 1)^N = 0.$$

En ajoutant et en soustrayant ces égalités, on obtient :

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \text{ pair}}} \binom{N}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq N \\ k \text{ impair}}} \binom{N}{k} = 2^{N-1}.$$

Chacune des deux distributions du tableau a donc une somme égale à 1. Les tirages pairs tendent vers la distribution portée par les entiers de même parité que r ; les tirages impairs tendent vers celle portée par les entiers de parité opposée, avec les poids w_k sur leur support respectif.

La distribution complète n'a pas de limite unique : pour $k = 0$, les limites des sous-suites paires et impaires sont 2^{1-N} et 0, dans un ordre déterminé par la parité de r . Elles sont distinctes. Cela est compatible avec la convergence de l'espérance et de la variance établie précédemment.

Relevé des adaptations

- II. 3) La notation U_n du vecteur des probabilités est explicitée dès son introduction, afin de correspondre aux relations matricielles qui suivent. Aucune question ni hypothèse mathématique n'est modifiée.