



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**HEC / ESCP**

**Mathématiques 2**

**1986**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

On suppose  $n \geq 2$  et  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ . Le seul circuit défectueux est  $c_n$ . Chaque paquet est choisi uniformément parmi toutes les parties de  $C$ ; les tirages successifs avec remise sont indépendants.

## Partie I : Tests par tirages de paquets de circuits, avec remise

---

1.a)

Une partie de  $C$  ne rencontre pas  $A$  si et seulement si elle est incluse dans  $C \setminus A$ . Cet ensemble contient  $n - r$  éléments.

Pour construire une telle partie, on choisit, pour chacun de ces  $n - r$  éléments, de l'inclure ou non. Les deux choix par élément donnent

$$\#\{G \subset C : G \cap A = \emptyset\} = 2^{n-r}.$$

Cela comprend les cas extrêmes : pour  $r = 0$ , toutes les  $2^n$  parties conviennent; pour  $r = n$ , seule la partie vide convient.

1.b)

Toute partie contenant  $A$  s'écrit de façon unique  $A \cup H$ , avec  $H \subset C \setminus A$ . Les éléments de  $A$  sont imposés, et les  $n - r$  autres sont libres.

La correspondance  $H \mapsto A \cup H$  est une bijection entre les parties de  $C \setminus A$  et les parties de  $C$  contenant  $A$ . Ainsi

$$\#\{G \subset C : A \subset G\} = 2^{n-r}.$$

Le résultat vaut encore pour  $r = 0$  et  $r = n$ .

2.a)

L'univers  $\Omega$  comporte  $2^n$  parties. Comme le tirage est équiprobable, chaque partie donnée  $B$  a pour probabilité

$$P(G = B) = \frac{1}{2^n}.$$

La partie vide et la partie  $C$  sont incluses dans cet univers.

2.b)

On divise le nombre de parties favorables obtenu en 1.b) par le nombre total de parties :

$$P(A \subset G) = \frac{2^{n-r}}{2^n} = \frac{1}{2^r}.$$

Pour  $A = \emptyset$ , cette probabilité vaut bien 1.

2.c)

Comme  $c_j \neq c_n$ , la partie  $\{c_j, c_n\}$  est de cardinal 2. D'après 2.b),

$$P(c_n \in G) = \frac{1}{2} > 0, \quad P(c_j \in G, c_n \in G) = \frac{1}{4}.$$

La probabilité conditionnelle est donc définie et vaut

$$P(c_j \in G \mid c_n \in G) = \frac{P(c_j \in G, c_n \in G)}{P(c_n \in G)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Connaître l'appartenance de  $c_n$  ne modifie pas la probabilité d'inclusion d'un autre circuit.

3.a)

Il faut tenir compte du fait que  $G_i$  est parfois le complémentaire du paquet effectivement tiré.

## Méthode 1 — Loi uniforme des ensembles de circuits encore possibles

---

Fixons  $H \in \Omega_n$ . Comme  $c_n \in H$ , l'égalité  $G_i = H$  se réalise exactement dans les deux cas disjoints  $B_i = H$  et  $B_i = \overline{H}$ . En effet, dans le premier cas le test est positif; dans le second, il est négatif et on conserve le complémentaire.

Les deux parties ont chacune la probabilité  $2^{-n}$ , donc

$$P(G_i = H) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

L'ensemble  $\Omega_n$  possède  $2^{n-1}$  éléments, car l'inclusion de  $c_n$  est imposée et celle des autres circuits est libre. Ainsi  $G_i$  est uniforme sur  $\Omega_n$ .

Parmi ces parties, celles contenant aussi  $c_j$  sont au nombre de  $2^{n-2}$ . Par conséquent,

$$P(c_j \in G_i) = \frac{2^{n-2}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

Les  $B_i$  sont indépendants et chaque  $G_i$  est une fonction du seul  $B_i$ . Les  $G_i$  sont donc indépendants, par le lemme des coalitions appliqué à des groupes de variables disjoints.

Enfin,  $c_j \in D_h$  équivaut à  $c_j \in G_i$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, h\}$ . L'indépendance des tirages donne

$$P(c_j \in D_h) = \prod_{i=1}^h P(c_j \in G_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^h = \frac{1}{2^h}.$$

## Méthode 2 — Décomposition selon le résultat de chaque test

---

Pour un test donné,  $c_j \in G_i$  signifie que  $c_j$  et  $c_n$  ont le même statut d'appartenance au

paquet  $B_i$ . Les deux possibilités sont : ils y appartiennent tous deux, ou ils n'y appartiennent ni l'un ni l'autre.

D'après 1 et 2, chacune de ces possibilités a la probabilité  $2^{n-2}/2^n = 1/4$ . Elles sont disjointes, donc

$$P(c_j \in G_i) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pour appartenir à  $D_h$ , le circuit  $c_j$  doit satisfaire cette condition à chacun des  $h$  tests. Ces conditions dépendent de tirages indépendants ; leur intersection a donc la probabilité  $2^{-h}$ .

La première méthode décrit toute la loi de  $G_i$  et prépare la question suivante. La seconde explique directement pourquoi un circuit sain conserve une chance sur deux de rester possible après chaque test.

3.b)

La partie  $E$  ne contient pas  $c_n$  ; son cardinal satisfait donc  $0 \leq r \leq n-1$ . Par la loi uniforme de  $G_i$  établie en 3.a), contenir  $E$  impose  $r$  inclusions supplémentaires parmi les  $n-1$  circuits libres.

Il reste  $n-1-r$  choix libres, donc

$$P(E \subset G_i) = \frac{2^{n-1-r}}{2^{n-1}} = 2^{-r}.$$

L'événement  $E \subset D_h$  est l'intersection des événements  $E \subset G_i$  pour les  $h$  tirages. Ceux-ci sont indépendants, d'où

$$P(E \subset D_h) = (2^{-r})^h = 2^{-hr}.$$

Pour  $r=0$ ,  $E$  est vide et cette formule donne correctement 1.

3.c)

Posons  $A_j = \{c_j \in D_h\}$  pour  $1 \leq j \leq n-1$ , et  $\rho = 2^{-h}$ . La question 3.a) donne  $P(A_j) = \rho$ .

Pour tout ensemble d'indices  $J \subset \{1, \dots, n-1\}$ , de cardinal  $r$ , la question 3.b) appliquée à  $E = \{c_j : j \in J\}$  donne

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \rho^r = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Cette égalité vaut pour toute sous-famille, et pas seulement pour les paires : elle établit l'indépendance mutuelle des  $A_j$ .

Pour préciser le passage aux complémentaires, on utilise une expansion finie. Pour un ensemble d'indices  $J$  de cardinal  $r$ ,

$$\mathbf{1}_{\bigcap_{j \in J} A_j^c} = \prod_{j \in J} (1 - \mathbf{1}_{A_j}) = \sum_{K \subset J} (-1)^{|K|} \mathbf{1}_{\bigcap_{j \in K} A_j}.$$

Pour  $K = \emptyset$ , l'intersection est l'univers et l'indicatrice vaut 1. Toutes les indicatrices sont bornées et la somme est finie, donc leurs espérances existent et la linéarité s'applique.

On obtient

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j^c\right) = \sum_{K \subset J} (-1)^{|K|} \rho^{|K|} = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (-1)^s \rho^s = (1 - \rho)^r.$$

Comme  $P(A_j^c) = 1 - \rho$ , c'est le produit des probabilités des complémentaires. Les événements  $\{c_j \notin D_h\}$  sont donc eux aussi mutuellement indépendants.

3.d)

Par construction,  $c_n$  appartient à chaque  $G_i$ , donc à  $D_h$ . Ainsi  $D_h = \{c_n\}$  si et seulement si aucun des  $n-1$  circuits sains n'appartient à  $D_h$  :

$$\{D_h = \{c_n\}\} = \bigcap_{j=1}^{n-1} \{c_j \notin D_h\}.$$

Ces événements sont mutuellement indépendants et ont chacun la probabilité  $1 - 2^{-h}$ .  
Par conséquent,

$$P(D_h = \{c_n\}) = \left(1 - \frac{1}{2^h}\right)^{n-1}.$$

Le complémentaire de cet événement signifie qu'au moins un circuit sain reste encore compatible avec les résultats des tests.

## Partie II : Étude du nombre de tests nécessaires pour détecter la panne

Dans cette partie,  $n \geq 2$  reste fixé tant qu'aucune limite en  $n$  n'est demandée. On pose  $p = n - 1 \geq 1$  lorsque cela simplifie les expressions.

1.a)

Pour obtenir une loi sur  $\mathbb{N}^*$ , il faut vérifier la positivité des masses et que leur somme vaut 1.

Comme  $p = n - 1 \geq 1$ , on a

$$a_0 = 1 - (1 - 1)^p = 1.$$

La suite  $2^{-k}$  décroît vers 0. Ainsi  $1 - 2^{-k}$  croît de 0 vers 1 ; la fonction  $v \mapsto v^p$  est croissante sur  $[0, 1]$ . La suite  $(a_k)$  est donc décroissante, à valeurs dans  $[0, 1]$ , et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

Posons  $p_k = a_{k-1} - a_k$  pour  $k \geq 1$ . La décroissance assure  $p_k \geq 0$ . Pour tout  $q \geq 1$ , une somme télescopique donne

$$\sum_{k=1}^q p_k = \sum_{k=1}^q (a_{k-1} - a_k) = a_0 - a_q = 1 - a_q.$$

Le passage à la limite donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1.$$

Les nombres  $p_k$  définissent donc une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}^*$ .

1.b)

Notons  $F$  la fonction de répartition de la loi précédente. Elle est nulle pour  $t < 1$ , puisque la loi est portée par les entiers strictement positifs.

Pour  $t \geq 1$ , les entiers  $k \geq 1$  tels que  $k \leq t$  sont exactement  $1, \dots, \lfloor t \rfloor$ . La somme télescopique de 1.a) donne

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} (a_{k-1} - a_k) = 1 - a_{\lfloor t \rfloor}.$$

Par conséquent,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ (1 - 2^{-\lfloor t \rfloor})^{n-1} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

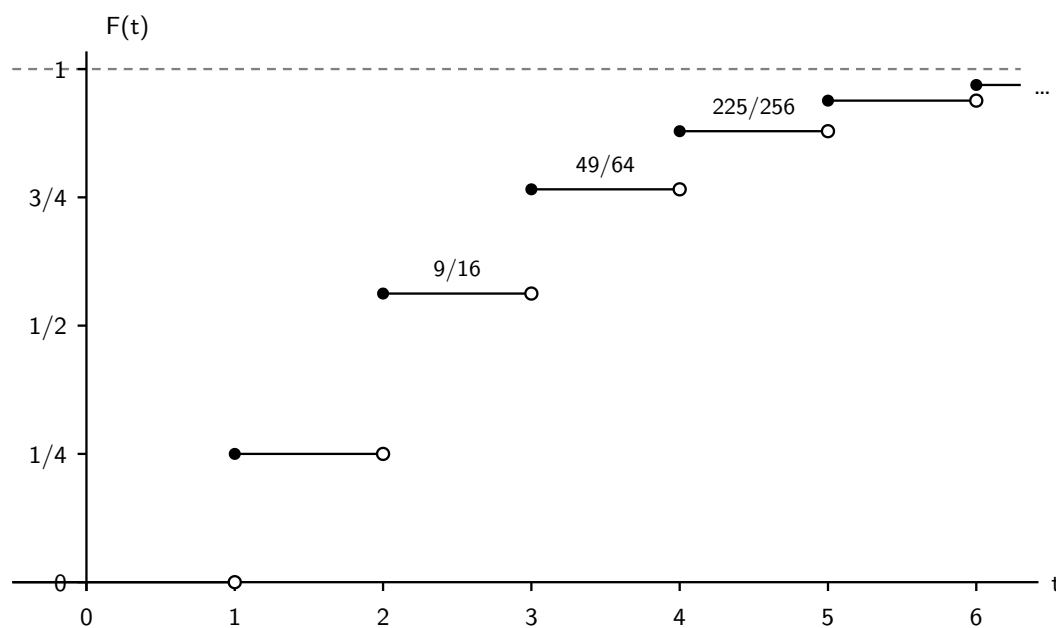
Lorsque  $n = 3$ , la fonction est constante sur chaque intervalle  $[k, k+1[$  et vaut, pour  $k \geq 1$ ,

$$F(t) = (1 - 2^{-k})^2.$$

Les premières valeurs sont :

| Intervalle de $t$ | Valeur de $F(t)$   |
|-------------------|--------------------|
| $] - \infty, 1[$  | 0                  |
| $[1, 2[$          | $\frac{1}{4}$      |
| $[2, 3[$          | $\frac{9}{16}$     |
| $[3, 4[$          | $\frac{49}{64}$    |
| $[4, 5[$          | $\frac{225}{256}$  |
| $[5, 6[$          | $\frac{961}{1024}$ |

Le graphe est une fonction en escalier, continue à droite. À chaque entier positif, le point du palier commençant à cet entier est inclus ; le point correspondant à la fin du palier précédent ne l'est pas. Les hauteurs tendent vers 1, sans atteindre cette valeur pour un  $t$  fini.



Fonction de répartition pour  $n = 3$

2.a)

On relie d'abord le temps de détection à la réduction successive des ensembles de circuits possibles.

Pour tout  $k \geq 1$ , on a  $c_n \in D_k$  et

$$D_{k+1} = D_k \cap G_{k+1} \subset D_k.$$

Ainsi, dès que  $D_k = \{c_n\}$ , toutes les intersections suivantes valent encore  $\{c_n\}$ . La détection est donc irréversible.

Précisons aussi qu'elle survient presque sûrement. Posons  $H_k = \{D_k = \{c_n\}\}$ . Les événements  $H_k$  sont croissants. D'après I.3.d),

$$P(H_k) = (1 - 2^{-k})^{n-1} \rightarrow 1.$$

Par continuité monotone des probabilités,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} H_k\right) = 1.$$

Le premier rang de détection est donc fini presque sûrement. Sur l'éventuel événement de probabilité nulle où la détection n'aurait jamais lieu, on peut fixer arbitrairement  $X_n = 1$  pour avoir une variable définie partout ; cela n'affecte aucune des probabilités calculées.

Sur l'événement de probabilité 1 où la détection a lieu,  $X_n \leq k$  équivaut à  $D_k = \{c_n\}$ . Les événements coïncident donc à un événement négligeable près, et

$$P(X_n \leq k) = (1 - 2^{-k})^{n-1} = 1 - a_k \quad (k \geq 1).$$

En particulier,  $P(X_n > k) = a_k$ . Cette formule vaut aussi pour  $k = 0$ , puisque  $X_n \geq 1$  et  $a_0 = 1$ .

2.b)

Comme  $X_n$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , pour tout  $k \geq 1$ ,

$$P(X_n = k) = P(X_n \leq k) - P(X_n \leq k-1).$$

Pour  $k = 1$ , le second terme vaut  $0 = 1 - a_0$ . Pour tous les autres rangs, on applique directement 2.a). Dans tous les cas,

$$P(X_n = k) = (1 - a_k) - (1 - a_{k-1}) = a_{k-1} - a_k.$$

C'est exactement la loi définie en II.1.a). Sa fonction de répartition est donc celle obtenue en II.1.b).

3.a)

Pour un entier  $s \geq 1$  fixé, la série considérée est géométrique de raison  $2^{-s} \in ]0, 1[$ . Elle converge, et, lorsqu'on commence à  $k = 0$ ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{ks}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}}.$$

### Méthode 1 — Développement fini par la formule du binôme

Avec  $p = n - 1 \geq 1$ , on développe

$$(1 - 2^{-k})^p = \sum_{s=0}^p \binom{p}{s} (-1)^s 2^{-ks}.$$

Le terme  $s = 0$  vaut 1, donc

$$a_k = \sum_{s=1}^p (-1)^{s+1} \binom{p}{s} 2^{-ks}.$$

Pour chaque  $s$ , la série en  $k$  converge d'après le résultat géométrique précédent. Comme la somme sur  $s$  est finie, les sommes partielles peuvent être réordonnées et on peut passer à la limite terme à terme dans cette somme finie. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

converge.

On peut aussi vérifier directement la convergence absolue :

$$|a_k| \leq \sum_{s=1}^p \binom{p}{s} 2^{-ks},$$

et la série du membre de droite converge comme somme finie de séries géométriques convergentes.

## Méthode 2 — Majoration par une seule série géométrique

---

Pour  $z \in [0, 1]$ , l'identité de factorisation d'une différence de puissances donne

$$1 - (1 - z)^p = z \sum_{\ell=0}^{p-1} (1 - z)^\ell.$$

Les  $p$  termes de la somme appartiennent à  $[0, 1]$ . En prenant  $z = 2^{-k}$ , on obtient

$$0 \leq a_k \leq p2^{-k} = (n - 1)2^{-k}.$$

La série

$$\sum_{k \geq 0} (n - 1)2^{-k}$$

converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série

$$\sum_{k \geq 0} a_k$$

converge également.

La première méthode suit la décomposition en puissances demandée par l'étude des séries  $2^{-ks}$ . La seconde fournit une borne positive simple, qui sera utile pour contrôler le terme de bord dans la question suivante.

3.b)

Il faut établir l'existence de l'espérance, et pas seulement écrire une formule de somme des queues. Puisque  $X_n \geq 0$ , son espérance est finie si et seulement si la série

$$\sum_{k \geq 1} kP(X_n = k)$$

converge.

Pour un entier  $q \geq 1$ , la loi obtenue en 2.b) donne la somme partielle

$$S_q = \sum_{k=1}^q k(a_{k-1} - a_k).$$

On décale l'indice de la première somme :

$$S_q = \sum_{j=0}^{q-1} (j+1)a_j - \sum_{j=1}^q ja_j = \sum_{j=0}^{q-1} a_j - qa_q.$$

Il s'agit d'une identité de sommes finies ; aucune permutation de séries infinies n'est nécessaire.

Par la majoration de 3.a),

$$0 \leq qa_q \leq (n-1) \frac{q}{2^q}.$$

Les croissances comparées donnent  $q/2^q \rightarrow 0$ . Ainsi  $qa_q \rightarrow 0$ , et la limite proposée par l'énoncé vaut

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \left( S_q - \sum_{k=0}^{q-1} a_k \right) = \lim_{q \rightarrow +\infty} (-qa_q) = 0.$$

Comme la série

$$\sum a_k$$

converge, les sommes  $S_q$  tendent vers une limite finie. La série définissant l'espérance converge donc, et

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Le terme  $a_0 = 1$  doit être conservé : le nombre de tests est toujours au moins égal à 1.

4.a)

Fixons un entier  $p \geq 1$ . La fonction  $f_p$  est continue sur  $[0, +\infty[$  ; il n'y a donc pas de difficulté d'intégration en 0 ou sur un segment. Il reste à contrôler l'infini.

### Méthode 1 — Développement en une somme finie d'exponentielles

La formule du binôme donne

$$f_p(t) = \sum_{s=1}^p (-1)^{s+1} \binom{p}{s} e^{-st}.$$

Pour chaque  $s \geq 1$ , l'intégrale de  $e^{-st}$  sur  $[0, +\infty[$  converge et vaut  $1/s$ . Le nombre de termes étant fini, on peut intégrer sur  $[0, R]$ , puis passer à la limite dans cette somme finie. L'intégrale de  $f_p$  converge donc, et

$$I_p = \sum_{s=1}^p (-1)^{s+1} \binom{p}{s} \frac{1}{s}.$$

Pour justifier aussi la convergence absolue, on a

$$|f_p(t)| \leq \sum_{s=1}^p \binom{p}{s} e^{-st},$$

dont l'intégrale converge.

## Méthode 2 — Comparaison positive avec une exponentielle

---

Pour  $t \geq 0$ ,  $0 < e^{-t} \leq 1$ . La factorisation utilisée en II.3.a) donne

$$f_p(t) = e^{-t} \sum_{\ell=0}^{p-1} (1 - e^{-t})^\ell.$$

Chaque terme de la somme appartient à  $[0, 1]$ , donc

$$0 \leq f_p(t) \leq p e^{-t}.$$

L'intégrale du majorant vaut  $p$  et converge. Par comparaison d'intégrales impropres de fonctions positives,  $I_p$  converge.

La première méthode donne une expression finie de l'intégrale. La seconde établit sa convergence sans coefficients binomiaux et sans termes de signes alternés.

4.b)

## Méthode 1 — Primitive de la différence et récurrence

Par définition,

$$f_{p+1}(t) - f_p(t) = (1 - e^{-t})^p - (1 - e^{-t})^{p+1} = e^{-t}(1 - e^{-t})^p.$$

Or la dérivée de  $1 - e^{-t}$  est  $e^{-t}$ . Une primitive demandée est donc

$$t \mapsto \frac{(1 - e^{-t})^{p+1}}{p+1}.$$

Les intégrales  $I_{p+1}$  et  $I_p$  convergent d'après 4.a). On peut soustraire les intégrales sur  $[0, R]$  puis passer à la limite. La primitive vaut 0 en 0 et tend vers  $1/(p+1)$  à l'infini, donc

$$I_{p+1} - I_p = \frac{1}{p+1}.$$

Pour initialiser,  $f_1(t) = e^{-t}$ , d'où  $I_1 = 1$ . En sommant les différences pour  $p = 1, \dots, n-2$ , lorsque  $n \geq 3$ , on obtient

$$I_{n-1} = I_1 + \sum_{p=1}^{n-2} (I_{p+1} - I_p) = 1 + \sum_{p=1}^{n-2} \frac{1}{p+1} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}.$$

Pour  $n = 2$ , cette identité se réduit à  $I_1 = 1$  et reste vraie. Ainsi, dans tous les cas,

$$I_{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

## Méthode 2 — Calcul direct par un changement de variable

Pour retrouver la somme harmonique directement, travaillons d'abord sur un segment  $[0, R]$ , avec  $R > 0$ , et posons  $v = 1 - e^{-t}$ . Ce changement est de classe  $C^1$ , strictement croissant ; il envoie  $[0, R]$  sur  $[0, 1 - e^{-R}]$  et vérifie  $dt = dv/(1 - v)$ .

Comme  $v < 1$  sur ce segment transformé,

$$I_p(R) = \int_0^{1-e^{-R}} \frac{1-v^p}{1-v} dv = \int_0^{1-e^{-R}} \sum_{j=0}^{p-1} v^j dv.$$

La somme est finie et son intégrande est un polynôme. En intégrant,

$$I_p(R) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(1 - e^{-R})^{j+1}}{j+1}.$$

Lorsque  $R \rightarrow +\infty$ , chaque puissance tend vers 1. On retrouve

$$I_p = \sum_{m=1}^p 1/m,$$

puis la formule pour  $p = n - 1$ .

La première méthode fournit la primitive et la récurrence explicitement demandées. La seconde explique la présence de la somme harmonique par la factorisation du quotient  $1 - v^p$  par  $1 - v$ .

4.c)

La fonction  $t \mapsto 1/t$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Pour  $m \geq 2$ , elle est continue sur les deux segments considérés.

Sur  $[m, m+1]$ ,  $1/t \leq 1/m$ . Comme le segment a longueur 1,

$$\int_m^{m+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{m}.$$

Sur  $[m-1, m]$ ,  $1/t \geq 1/m$ , donc

$$\frac{1}{m} \leq \int_{m-1}^m \frac{dt}{t}.$$

Pour la minoration de  $I_{n-1}$ , la première inégalité vaut également pour  $m = 1$  : sur  $[1, 2]$ ,  $1/t \leq 1$ . On peut donc la sommer de  $m = 1$  à  $n-1$  :

$$\ln n = \int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} = I_{n-1}.$$

Pour la majoration, on conserve séparément le terme  $m = 1$ , puis on somme la seconde inégalité de  $m = 2$  à  $n-1$  :

$$I_{n-1} = 1 + \sum_{m=2}^{n-1} \frac{1}{m} \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n-1).$$

Pour  $n = 2$ , la somme est vide et l'intégrale de 1 à 1 est nulle ; la majoration reste vraie. On a donc, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\ln n \leq I_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1).$$

Comme  $\ln n > 0$ , on peut diviser :

$$1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n-1)}{\ln n}.$$

On a  $1/\ln n \rightarrow 0$  et  $\ln(n-1) = \ln n + \ln(1 - 1/n)$ , avec  $\ln(1 - 1/n) \rightarrow 0$ . Le membre de droite tend donc vers 1. Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n-1}}{\ln n} = 1.$$

4.d)

La fonction  $g_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Pour  $u > 0$ , elle est dérivable et

$$g'_n(u) = -(n-1)(\ln 2)2^{-u}(1-2^{-u})^{n-2}.$$

Pour  $u > 0$ , tous les facteurs après le signe moins sont strictement positifs, y compris lorsque  $n = 2$ , où la dernière puissance vaut 1. Donc  $g'_n(u) < 0$  sur  $]0, +\infty[$ .

Avec la continuité en 0,  $g_n$  est décroissante sur  $[0, +\infty[$ . On peut aussi constater cette décroissance directement :  $1 - 2^{-u}$  croît et sa puissance d'exposant  $n - 1 \geq 1$  croît.

Pour chaque entier  $k \geq 1$ ,  $g_n(k) = a_k$  et  $g_n(k-1) = a_{k-1}$ . Ainsi, pour  $u \in [k-1, k]$ ,

$$a_k \leq g_n(u) \leq a_{k-1}.$$

La fonction est continue sur ce segment. En intégrant sur un intervalle de longueur 1,

$$a_k \leq \int_{k-1}^k g_n(u) \, du \leq a_{k-1}.$$

4.e)

Pour  $q \geq 2$ , sommons les inégalités de 4.d) de  $k = 1$  à  $q$ . La relation de Chasles et le changement d'indice dans la somme supérieure donnent

$$\sum_{k=1}^q a_k \leq \int_0^q g_n(u) \, du \leq \sum_{k=0}^{q-1} a_k.$$

Dans l'intégrale sur le segment  $[0, q]$ , posons  $t = u \ln 2$ . Comme  $\ln 2 > 0$ , c'est un changement de variable affine croissant ; les bornes deviennent 0 et  $q \ln 2$ , et  $2^{-u} = e^{-t}$ . Par conséquent,

$$\int_0^q g_n(u) \, du = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{q \ln 2} (1 - (1 - e^{-t})^{n-1}) \, dt = \frac{I_{n-1}(q \ln 2)}{\ln 2}.$$

L'intégrale impropre  $I_{n-1}$  converge d'après 4.a), et  $q \ln 2 \rightarrow +\infty$ . Le terme central tend donc vers  $I_{n-1}/\ln 2$ .

D'après 3.b), la somme supérieure tend vers  $E(X_n)$ . La somme inférieure commence à  $k = 1$ , donc elle tend vers  $E(X_n) - a_0 = E(X_n) - 1$ .

En passant à la limite dans les inégalités, on obtient

$$E(X_n) - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq E(X_n).$$

De façon équivalente,

$$\frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq E(X_n) \leq 1 + \frac{I_{n-1}}{\ln 2}.$$

L'écart entre la série et l'intégrale est donc au plus égal à 1.

4.f)

La constante  $\ln 2$  est strictement positive. On peut donc combiner les encadrements de 4.c) et 4.e) en conservant le sens des inégalités :

$$\frac{\ln n}{\ln 2} \leq E(X_n) \leq 1 + \frac{1 + \ln(n-1)}{\ln 2} \quad (n \geq 2).$$

Multiplions par  $\ln 2 / \ln n > 0$  :

$$1 \leq \frac{E(X_n) \ln 2}{\ln n} \leq \frac{\ln(n-1)}{\ln n} + \frac{1 + \ln 2}{\ln n}.$$

Comme en 4.c), le premier terme de droite tend vers 1, et le second vers 0. Par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(X_n)}{\ln n} \ln 2 = 1.$$

On peut aussi écrire

$$E(X_n) \sim \frac{\ln n}{\ln 2} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Le nombre moyen de tests par paquets croît donc comme le logarithme du nombre de circuits.

5.a)

Les tirages sans remise rangent les  $n$  circuits dans un ordre aléatoire. Le nombre  $Y_n$  est le rang auquel le circuit défectueux est testé ; ses valeurs possibles sont  $1, \dots, n$ .

### Méthode 1 — Dénombrement des ordres de tirage

---

Chaque permutation des  $n$  circuits a la probabilité

$$\frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}.$$

Pour un rang  $k \in \{1, \dots, n\}$  fixé, on impose  $c_n$  à la place  $k$ ; les  $n - 1$  autres circuits peuvent être ordonnés de  $(n - 1)!$  façons. Ainsi

$$P(Y_n = k) = \frac{(n - 1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

## Méthode 2 — Probabilités conditionnelles successives

Pour que  $Y_n = k$ , il faut tirer successivement  $k - 1$  circuits sains, puis le circuit défectueux. Après chaque tirage sain, le circuit défectueux reste parmi les circuits non tirés.

Les probabilités successives de tirer un circuit sain aux rangs  $1, \dots, k - 1$  sont  $(n - 1)/n, (n - 2)/(n - 1), \dots, (n - k + 1)/(n - k + 2)$ . Au rang  $k$ , il reste  $n - k + 1$  circuits, dont exactement un est défectueux. Par la formule des probabilités composées,

$$P(Y_n = k) = \left( \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n - j}{n - j + 1} \right) \frac{1}{n - k + 1} = \frac{n - k + 1}{n} \frac{1}{n - k + 1} = \frac{1}{n}.$$

Pour  $k = 1$ , le produit vide vaut 1, et la formule donne directement  $1/n$ . Tous les événements sur lesquels on conditionne ont une probabilité strictement positive.

Dans les deux approches,  $Y_n$  suit donc la loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ , avec probabilité nulle en dehors de cet ensemble. Le dénombrement explique la symétrie des positions; le calcul conditionnel suit la procédure et tient compte de l'absence de remise.

5.b)

La variable  $Y_n$  est bornée entre 1 et  $n$ , donc son espérance existe. Par sa loi uniforme,

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^n kP(Y_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k.$$

La somme des  $n$  premiers entiers vaut  $n(n+1)/2$ , d'où

$$E(Y_n) = \frac{n+1}{2}.$$

Le nombre moyen de tests individuels croît donc linéairement avec le nombre de circuits.

6.a)

Le dénominateur  $E(Y_n) = (n+1)/2$  est strictement positif. L'encadrement de II.4.f) donne

$$0 \leq \frac{E(X_n)}{E(Y_n)} \leq \frac{2}{n+1} \left( 1 + \frac{1 + \ln(n-1)}{\ln 2} \right).$$

Le membre de droite tend vers 0 : les termes constants divisés par  $n+1$  tendent vers 0, et  $\ln(n-1)/(n+1) \rightarrow 0$  par croissances comparées.

Par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(X_n)}{E(Y_n)} = 0.$$

Ainsi, pour un grand nombre de circuits, la méthode des paquets demande en moyenne beaucoup moins de tests que la méthode individuelle, dans le modèle où chaque test de paquet compte pour un test.

6.b)

On utilise précisément l'encadrement demandé en II.4.f), sans assimiler une borne à la valeur exacte de l'espérance.

Pour  $n = 100$ ,

$$\frac{\ln 100}{\ln 2} \leq E(X_{100}) \leq 1 + \frac{1 + \ln 99}{\ln 2}, \quad E(Y_{100}) = \frac{101}{2} = 50,5.$$

La borne inférieure vaut environ 6,64386 et la borne supérieure environ 9,07205. En arrondissant vers l'extérieur, on conserve l'encadrement rigoureux

$$6,64 \leq E(X_{100}) \leq 9,08 < 50,5 = E(Y_{100}).$$

Pour  $n = 1000$ ,

$$\frac{\ln 1000}{\ln 2} \leq E(X_{1000}) \leq 1 + \frac{1 + \ln 999}{\ln 2}, \quad E(Y_{1000}) = \frac{1001}{2} = 500,5.$$

La borne inférieure vaut environ 9,96578 et la borne supérieure environ 12,40704. En arrondissant encore vers l'extérieur,

$$9,96 \leq E(X_{1000}) \leq 12,41 < 500,5 = E(Y_{1000}).$$

La méthode par paquets est donc nettement plus économe en nombre moyen de tests dans les deux cas. On peut récapituler les bornes, qui ne sont pas les espérances exactes :

| Nombre de circuits | Encadrement de l'espérance des tests par paquets | Espérance des tests individuels |
|--------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------|
| 100                | [6,64; 9,08]                                     | 50,5                            |
| 1000               | [9,96; 12,41]                                    | 500,5                           |

## Relevé des adaptations

---

Aucune adaptation mathématique des questions n'est nécessaire. Les outils utilisés appartiennent au référentiel fourni. En II.2.a), l'arrêt presque sûr justifie la définition du temps de détection; la convention sur un éventuel événement de probabilité nulle ne change pas sa loi. Le tracé demandé en II.1.b) est intégré en SVG dans le corrigé.