



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1985

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Pour tous entiers naturels non nuls $q \leq r$, on note :

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q+1} + \cdots + \frac{1}{r}$$

la somme des inverses des entiers consécutifs de q à r . Cette somme se réduit à $1/q$ si $q = r$.

Partie I

Soient $u = (u_n)_{n \geq 1}$ et $v = (v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

1. Étudier le signe des fonctions φ et ψ définies sur $] -1, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - x, \quad \psi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

2. Montrer que u est décroissante et que v est croissante.

3. Montrer que u et v convergent vers une même limite a , que l'on ne demande pas de calculer.

4. (a) Déterminer un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique :

$$|a - v_{n-1}| \leq 10^{-2}.$$

4. (b) Calculer une valeur approchée de a à la précision 10^{-1} .

Partie II

Une entreprise doit recruter au plus un employé à choisir parmi n candidats, avec $n \geq 5$. Ces candidats peuvent être classés sans ex æquo selon leur valeur. Ils sont entendus l'un après l'autre par le directeur, qui doit décider immédiatement, à la fin de chaque entretien, d'engager ou de refuser le candidat. Il ne peut donc comparer celui-ci qu'aux candidats préalablement entendus et refusés.

L'ordre de passage des candidats est aléatoire, tous les ordres possibles étant équiprobables.

On étudie la procédure suivante. On fixe un seuil entier s tel que $2 \leq s \leq n$. On entend d'abord les $s - 1$ premiers candidats, que l'on refuse systématiquement. Ils constituent un échantillon fixant le niveau de qualité du recrutement. On engage ensuite le premier candidat qui se révèle meilleur que les $s - 1$ candidats de l'échantillon. S'il ne s'en présente pas, personne n'est engagé.

On note $\theta_n(s)$ la probabilité que cette procédure engage le meilleur des n candidats.

1. On note E_k , pour $1 \leq k \leq n$, l'événement «le meilleur des n candidats est le k -ième à se présenter», et $F_{k,s}$, pour $s \leq k \leq n$, l'événement «le meilleur des $k - 1$ premiers candidats est parmi les $s - 1$ premiers à se présenter».

1. (a) Calculer $P(E_k)$ et $P(F_{k,s})$ pour $s \leq k \leq n$.

1. (b) Calculer $P(E_k \cap F_{k,s})$ et en déduire que :

$$\theta_n(s) = \frac{s-1}{n} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right).$$

1. (c) À l'aide de la partie I, s étant fixé, trouver la limite de $\theta_n(s)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. (a) Calculer la probabilité de ne recruter aucun candidat.

2. (b) Pour tout entier j tel que $s \leq j \leq n$, calculer la probabilité que le j -ième candidat soit recruté.
2. (c) En déduire la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de candidats entendus à la fin de la procédure, et montrer que :

$$E(X) = (s-1) \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} + \dots + \frac{1}{n-1} + 1 \right).$$

Partie III

1. (a) Écrire l'expression de $\theta_n(s+1) - \theta_n(s)$, pour $s \leq n-1$, à l'aide de II. 1. (b). En déduire qu'il existe un unique entier $s_n \in \{2, \dots, n-1\}$ tel que, pour tout entier $s \in \{2, \dots, n\}$, $\theta_n(s_n) \geq \theta_n(s)$.

On admettra à cet effet que, pour tous entiers naturels q, r tels que $1 < q \leq r$:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q+1} + \dots + \frac{1}{r} \neq 1.$$

Montrer que s_n est caractérisé par les deux relations :

$$\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_n+1} + \dots + \frac{1}{n-1} < 1,$$

$$\frac{1}{s_n-1} + \frac{1}{s_n} + \dots + \frac{1}{n-1} > 1.$$

1. (b) Calculer s_5, s_6, s_7 et s_8 .

1. (c) Montrer que, pour tout $n \geq 5$, soit $s_{n+1} = s_n$, soit $s_{n+1} = s_n + 1$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier $q > 1$:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} + \dots + \frac{1}{2q} > \frac{1}{2},$$

et :

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} + \dots + \frac{1}{4q} > 1.$$

2. (b) En déduire que $s_n - 1 > (n - 1)/4$.

3. (a) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{s_n - 1} + \frac{1}{s_n} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

En déduire la limite de $\frac{n}{s_n - 1} \theta_n(s_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (b) À l'aide de la partie I, montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{s_n - 1} \theta_n(s_n) - \ln \frac{n}{s_n - 1} \right) = 0.$$

3. (c) En déduire la limite de n/s_n lorsque n tend vers $+\infty$. En conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n(s_n) = \frac{1}{e}.$$

4. On suppose $n = 300$. À l'aide des résultats précédents, déterminer rapidement une valeur approchée, sans évaluer l'erreur commise :

4. (a) Du seuil s donnant la plus grande probabilité de recruter le meilleur des 300 candidats.

4. (b) De cette probabilité.

4. (c) De l'espérance de X définie en II. 2. (c).

5. On pose :

$$\alpha_n = \frac{\theta_{n+1}(s_{n+1})}{\theta_n(s_n)}.$$

5. (a) On suppose $s_{n+1} = s_n$. Montrer que $\alpha_n < 1$.

5. (b) Soit f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \frac{s_n}{n+1} \times \frac{n}{s_n-1} \times \frac{x+1/n}{x+1/(s_n-1)}.$$

Montrer que f est croissante. En déduire que le résultat de 5. (a) reste valable lorsque $s_{n+1} = s_n + 1$.

6. À l'aide de III. 3, montrer que, pour n suffisamment grand, l'égalité $s_{n+1} = s_n + 1$ implique $s_{n+2} = s_{n+1}$.