



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1985

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

On note

$$H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$$

pour $n \geq 1$. Ainsi $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.

1. Les deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$, car $1+x > 0$. Leurs dérivées sont :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x},$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

La fonction φ est strictement croissante sur $] -1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Elle atteint son maximum en 0, avec $\varphi(0) = 0$. Ainsi $\varphi(x) < 0$ pour $x \neq 0$, et $\varphi(0) = 0$.

La fonction ψ est strictement décroissante sur $] -1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle atteint son minimum en 0, avec $\psi(0) = 0$. Ainsi $\psi(x) > 0$ pour $x \neq 0$, et $\psi(0) = 0$.

En particulier, pour tout $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

2. Pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\psi\left(\frac{1}{n}\right) < 0.$$

En effet, $(1/n)/(1+1/n) = 1/(n+1)$. Ainsi u est strictement décroissante.

De même :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = -\varphi\left(\frac{1}{n+1}\right) > 0.$$

La suite v est donc strictement croissante.

3. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$u_n - v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$$

La monotonie donne les encadrements :

$$v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1.$$

La suite v est croissante et majorée ; u est décroissante et minorée. Elles convergent donc vers des limites réelles. Leur différence tend vers 0, puisque $\ln(1 + 1/n) \rightarrow 0$ par continuité du logarithme en 1.

Elles sont ainsi adjacentes et leurs limites sont égales. On note cette limite a . Pour tout $n \geq 1$:

$$v_n \leq a \leq u_n.$$

Aucune valeur exacte de a n'est nécessaire.

4. (a) Pour $n \geq 2$, l'encadrement précédent appliqué au rang $n - 1$ donne :

$$0 \leq a - v_{n-1} \leq u_{n-1} - v_{n-1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \leq \frac{1}{n-1}.$$

La dernière borne résulte de I. 1. Si $n \geq 101$, alors $1/(n-1) \leq 10^{-2}$. On peut donc prendre :

$$n_0 = 101.$$

Le sujet demande un entier convenable, sans imposer qu'il soit le plus petit possible.

4. (b) Pour obtenir une approximation à 10^{-1} , un nombre modéré de termes suffit. On a :

$$H_{10} = \frac{7381}{2520} \simeq 2,928968.$$

Avec $\ln 10 \simeq 2,302585$ et $\ln 11 \simeq 2,397895$, l'encadrement de I. 3 donne :

$$v_{10} \simeq 0,531073 \leq a \leq u_{10} \simeq 0,626383.$$

Le nombre 0,6 est à moins de 0,07 de chaque borne, donc à moins de 0,1 de tout point de cet intervalle. Ainsi :

$$a \simeq 0,6 \quad \text{à la précision } 10^{-1}.$$

La conclusion repose sur l'encadrement, et non sur l'affirmation que l'une des deux suites aurait déjà atteint sa limite.

Partie II

Les $n!$ permutations des candidats sont équiprobables. On peut numéroté les candidats par leur qualité, sans changer les probabilités : leurs qualités sont toutes distinctes.

1. (a) Le meilleur des n candidats a autant de chances d'occuper chacune des n positions. Donc :

$$P(E_k) = \frac{1}{n}.$$

Dans les $k - 1$ premières positions, la position du meilleur candidat de ce groupe est uniforme sur $\{1, \dots, k - 1\}$. Cela résulte de la symétrie des permutations de ces positions, y compris si l'on fixe l'ensemble des candidats qui les occupent.

Il y a $s - 1$ positions favorables, donc :

$$P(F_{k,s}) = \frac{s - 1}{k - 1}.$$

Les dénominateurs sont non nuls car $k \geq s \geq 2$. Pour $k = s$, cette probabilité vaut bien 1.

1. (b) Conditionnellement à E_k , le meilleur de tous est fixé en position k et les $n - 1$ autres candidats sont encore répartis uniformément dans les autres positions. La position du meilleur parmi les $k - 1$ premiers reste donc uniforme. Ainsi :

$$P(F_{k,s} \mid E_k) = \frac{s - 1}{k - 1},$$

$$P(E_k \cap F_{k,s}) = P(E_k)P(F_{k,s} | E_k) = \frac{s-1}{n(k-1)}.$$

Le conditionnement justifie le produit de probabilités ; l'indépendance n'est pas supposée sans preuve.

Si le meilleur de tous est en position $k \geq s$, il sera recruté exactement lorsque aucun candidat des positions $s, \dots, k-1$ n'a dépassé le niveau de l'échantillon. Cela équivaut à dire que le meilleur des $k-1$ premiers était dans l'échantillon, c'est-à-dire à $F_{k,s}$.

Si le meilleur de tous appartient à l'échantillon, il est refusé. Ainsi l'événement de réussite est l'union disjointe des $E_k \cap F_{k,s}$ pour $k = s, \dots, n$. En sommant :

$$\theta_n(s) = \sum_{k=s}^n \frac{s-1}{n(k-1)} = \frac{s-1}{n} \sum_{j=s-1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

C'est exactement la formule demandée.

1. (c) Le seuil $s \geq 2$ est fixé. Posons $H_0 = 0$ pour inclure $s = 2$. La formule précédente donne :

$$\theta_n(s) = \frac{s-1}{n} (H_{n-1} - H_{s-2}) = \frac{s-1}{n} (\ln n + v_{n-1} - H_{s-2}).$$

D'après I. 3, $v_{n-1} \rightarrow a$; cette suite est donc bornée. Le nombre H_{s-2} est constant et $\ln n/n \rightarrow 0$ par croissance comparée. Chacun des termes de l'expression tend donc vers 0, et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n(s) = 0.$$

Un seuil fixé indépendamment du nombre total de candidats ne conserve donc pas une probabilité de réussite strictement positive à la limite.

2. (a) Aucun candidat n'est recruté si et seulement si le meilleur des n candidats se trouve dans les $s-1$ premiers.

En effet, dans ce cas aucun candidat ultérieur ne dépasse le meilleur de l'échantillon. Réciproquement, si le meilleur de tous est après l'échantillon, il dépasse ce niveau ; la procédure a alors recruté soit un candidat précédent qui l'a déjà dépassé, soit ce meilleur lui-même.

La position du meilleur est uniforme, donc :

$$P(\text{aucun recrutement}) = \frac{s-1}{n}.$$

2. (b) Notons R_j l'événement de recrutement du candidat de position j , où $s \leq j \leq n$. Il se réalise exactement lorsque :

- le candidat j est le meilleur des j premiers ;
- le meilleur des $j-1$ premiers était dans l'échantillon de taille $s-1$.

La seconde condition signifie qu'aucun des candidats précédents après l'échantillon n'a déjà provoqué un recrutement. La première garantit que le candidat j dépasse ce niveau.

La probabilité que le meilleur des j premiers soit en position j est $1/j$.

Conditionnellement à cela, les positions des $j-1$ autres candidats restent symétriques, donc la seconde condition a pour probabilité $(s-1)/(j-1)$.

Ainsi :

$$P(R_j) = \frac{s-1}{j(j-1)}.$$

2. (c) Le nombre d'entretiens est au moins s et au plus n . Pour $s \leq j < n$, $X = j$ signifie précisément que le candidat j a été recruté, donc :

$$P(X = j) = \frac{s-1}{j(j-1)}.$$

Au rang n , il faut réunir les cas « recrutement du dernier candidat » et « aucun recrutement ». Ces événements sont disjoints. Ainsi :

$$P(X = n) = \frac{s-1}{n(n-1)} + \frac{s-1}{n} = \frac{s-1}{n-1}.$$

Toutes les autres probabilités sont nulles. Si $s = n$, la première plage d'indices est vide et $P(X = n) = 1$, ce qui correspond bien à l'écoute de tous les candidats.

Pour vérifier la normalisation, utilisons $1/(j(j-1)) = 1/(j-1) - 1/j$:

$$\sum_{j=s}^{n-1} \frac{s-1}{j(j-1)} + \frac{s-1}{n-1} = (s-1) \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{n-1} \right) + \frac{s-1}{n-1} = 1.$$

Méthode 1 — Espérance à partir de la loi

La variable est bornée, donc possède une espérance. Par définition :

$$E(X) = (s-1) \sum_{j=s}^{n-1} \frac{1}{j-1} + \frac{n(s-1)}{n-1}.$$

Comme $n/(n-1) = 1 + 1/(n-1)$, on obtient :

$$E(X) = (s-1) \left(\sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} + 1 \right).$$

Le terme $+1$ est bien à l'intérieur des parenthèses ; il est donc multiplié par $s-1$.

Méthode 2 — Probabilités de poursuivre les entretiens

Puisque X est entière et comprise entre s et n , on a l'identité finie :

$$X = s + \sum_{k=s}^{n-1} \mathbf{1}_{[X > k]}.$$

Pour $s \leq k < n$, l'événement $[X > k]$ signifie qu'aucun des k premiers candidats n'a été recruté. Il équivaut à ce que le meilleur des k premiers soit dans l'échantillon. Par symétrie :

$$P(X > k) = \frac{s-1}{k}.$$

En prenant les espérances dans l'identité finie :

$$E(X) = s + (s-1) \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} = (s-1) \left(\sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} + 1 \right).$$

Les deux méthodes donnent la même formule. La première utilise chaque valeur de X ; la seconde compte la probabilité de devoir effectuer un entretien supplémentaire.

Partie III

Rectification locale : le numéro de cette partie, omis dans son titre dans le PDF, est restitué conformément aux renvois à III. 3.

Pour alléger les expressions, on note

$$A_n(s) = \sum_{k=s}^{n-1} 1/k$$

pour $2 \leq s \leq n-1$.

1. (a) D'après II. 1. (b) :

$$\theta_n(s) = \frac{s-1}{n} \left(\frac{1}{s-1} + A_n(s) \right), \quad \theta_n(s+1) = \frac{s}{n} A_n(s).$$

En soustrayant :

$$\theta_n(s+1) - \theta_n(s) = \frac{1}{n} (A_n(s) - 1).$$

Le signe de la différence est donc celui de la somme $A_n(s)$ diminuée de 1.

Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans l'énoncé original : pour tous entiers $1 < q \leq r$,

$$\sum_{k=q}^r 1/k \neq 1.$$

Il entraîne $A_n(s) \neq 1$ pour tous les indices considérés. Aucune démonstration de cette propriété arithmétique n'est nécessaire ici.

La somme $A_n(s)$ est strictement décroissante en s , puisque $A_n(s+1) = A_n(s) - 1/s$.
Pour $n \geq 5$:

$$A_n(2) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1,$$

$$A_n(n-1) = \frac{1}{n-1} < 1.$$

Il existe donc un unique premier indice $s_n \in \{3, \dots, n-1\}$ pour lequel $A_n(s_n) < 1$.
L'indice précédent vérifie $A_n(s_n - 1) > 1$, l'égalité étant exclue par le résultat admis.

Pour $s < s_n$, $A_n(s) > 1$, donc $\theta_n(s+1) > \theta_n(s)$. Pour $s \geq s_n$, $A_n(s) < 1$, donc $\theta_n(s+1) < \theta_n(s)$. La suite finie des probabilités croît strictement jusqu'à s_n , puis décroît strictement. Son maximum est donc unique.

La caractérisation annoncée est exactement :

$$\sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{1}{k} < 1, \quad \sum_{k=s_n-1}^{n-1} \frac{1}{k} > 1.$$

Cette preuve montre aussi $s_n \geq 3$, propriété utile à la question 2.

1. (b) On applique la caractérisation précédente. Pour chaque ligne, la somme commençant en s_n est inférieure à 1 et celle commençant en $s_n - 1$ est supérieure à 1 :

n	s_n	Somme depuis s_n	Somme depuis $s_n - 1$
5	3	7/12	13/12
6	3	47/60	77/60
7	3	19/20	29/20
8	4	319/420	153/140

Par exemple, pour $n = 8$, $1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 = 153/140 > 1$, tandis que la suppression de $1/3$ donne $319/420 < 1$.

Ainsi :

$$s_5 = s_6 = s_7 = 3, \quad s_8 = 4.$$

1. (c) Posons $t = s_n$. Lorsqu'on passe de n à $n + 1$, chaque somme de la caractérisation reçoit le terme supplémentaire $1/n$.

D'une part :

$$\sum_{k=t-1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=t-1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} > 1.$$

Le premier seuil dont la somme est inférieure à 1 ne peut donc pas être inférieur à t .

Ainsi $s_{n+1} \geq t$.

D'autre part :

$$\sum_{k=t+1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=t}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{t} + \frac{1}{n}.$$

On a $t \leq n - 1 < n$, donc $1/t > 1/n$. Comme la première somme du membre de droite

est inférieure à 1, le membre de gauche est également inférieur à 1. Le premier seuil faisant passer sous 1 est donc au plus $t + 1$: $s_{n+1} \leq t + 1$.

Puisque les seuils sont entiers :

$$s_{n+1} \in \{s_n, s_n + 1\}.$$

2. (a) La somme de $q + 1$ à $2q$ comporte q termes. Chacun est au moins égal à $1/(2q)$, et au moins l'un est strictement supérieur puisque $q > 1$. Ainsi :

$$\sum_{k=q+1}^{2q} \frac{1}{k} > q \cdot \frac{1}{2q} = \frac{1}{2}.$$

En appliquant la même inégalité à l'entier $2q > 1$:

$$\sum_{k=2q+1}^{4q} \frac{1}{k} > \frac{1}{2}.$$

En additionnant les deux blocs :

$$\sum_{k=q+1}^{4q} \frac{1}{k} > 1.$$

Les deux inégalités strictes demandées sont établies.

2. (b) Posons $q = s_n - 1$. D'après 1. (a), $q \geq 2$, donc l'inégalité de 2. (a) est applicable.

Si l'on avait $n - 1 \geq 4q$, la somme de la caractérisation du seuil vérifierait :

$$\sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=q+1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=q+1}^{4q} \frac{1}{k} > 1,$$

ce qui contredirait

$$\sum_{k=s_n}^{n-1} 1/k < 1.$$

Ainsi $n - 1 < 4q$, soit :

$$s_n - 1 > \frac{n - 1}{4}.$$

En particulier, $s_n - 1$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (a) Posons $q_n = s_n - 1$ et

$$B_n = \sum_{k=q_n}^{n-1} 1/k.$$

La caractérisation donne :

$$1 < B_n = \frac{1}{q_n} + \sum_{k=s_n}^{n-1} \frac{1}{k} < 1 + \frac{1}{q_n}.$$

En ajoutant $1/n$:

$$1 < \sum_{k=q_n}^n \frac{1}{k} < 1 + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{n}.$$

Par 2. (b), $q_n \rightarrow +\infty$; les deux termes supplémentaires tendent vers 0. Le théorème d'encadrement donne :

$$\sum_{k=s_n-1}^n \frac{1}{k} \rightarrow 1.$$

La suppression du terme $1/n \rightarrow 0$ donne aussi $B_n \rightarrow 1$. Or II. 1. (b) donne exactement :

$$\frac{n}{s_n - 1} \theta_n(s_n) = B_n.$$

Ainsi la limite de cette expression est également 1.

3. (b) Méthode 1 — Différence de deux termes de la suite v

Avec $q_n = s_n - 1 \geq 2$, on a :

$$B_n - \ln \frac{n}{q_n} = H_{n-1} - H_{q_n-1} - \ln n + \ln q_n = v_{n-1} - v_{q_n-1}.$$

D'après I. 3, la suite v converge vers a . Les deux indices $n - 1$ et $q_n - 1$ tendent vers $+\infty$, donc les deux termes tendent vers a . Pour le second, c'est directement la définition de la limite d'une suite : $q_n - 1$ finit par dépasser tout rang fixé.

Leur différence tend donc vers 0. Comme $B_n = n\theta_n(s_n)/(s_n - 1)$, on obtient exactement la limite demandée.

Méthode 2 — Encadrement direct par une intégrale

La fonction $t \mapsto 1/t$ est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour chaque entier $k \geq q_n$, son intégrale sur $[k, k + 1]$ est au plus $1/k$. En sommant :

$$\ln \frac{n}{q_n} = \int_{q_n}^n \frac{dt}{t} \leq B_n.$$

Inversement, pour $k \geq q_n + 1$, on a $1/k \leq \int_{k-1}^k dt/t$. En isolant le premier terme :

$$B_n \leq \frac{1}{q_n} + \int_{q_n}^{n-1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{q_n} + \ln \frac{n}{q_n}.$$

Ainsi $0 \leq B_n - \ln(n/q_n) \leq 1/q_n \rightarrow 0$, ce qui donne la même conclusion. La première méthode exploite la limite commune établie en partie I ; la seconde fournit une borne explicite valable pour chaque n .

3. (c) D'après 3. (a), $B_n \rightarrow 1$. D'après 3. (b), $B_n - \ln(n/q_n) \rightarrow 0$, donc :

$$\ln \frac{n}{q_n} \rightarrow 1.$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$\frac{n}{q_n} \rightarrow e.$$

Comme $s_n = q_n + 1$ et $q_n \rightarrow +\infty$, $s_n/q_n \rightarrow 1$. Par quotient de suites dont le dénominateur a une limite non nulle :

$$\frac{n}{s_n} = \frac{n/q_n}{s_n/q_n} \rightarrow e.$$

Enfin $\theta_n(s_n) = (q_n/n)B_n$, avec $q_n/n \rightarrow 1/e$ et $B_n \rightarrow 1$. Donc :

$$\theta_n(s_n) \rightarrow \frac{1}{e}.$$

4. (a) La relation $s_n - 1 \sim n/e$ suggère de refuser environ n/e candidats, puis de commencer à recruter au rang suivant. Pour $n = 300$:

$$\frac{300}{e} \simeq 110,36.$$

On peut donc proposer un échantillon d'environ 110 candidats refusés, et le seuil :

$$s \simeq 111.$$

Il s'agit de l'approximation demandée à partir des limites, sans évaluation de l'erreur ni calcul exact du seuil par les sommes harmoniques.

4. (b) La probabilité optimale est approchée par sa limite :

$$\theta_{300}(s_{300}) \simeq \frac{1}{e} \simeq 0,368,$$

soit environ 36,8 %.

4. (c) Pour le seuil optimal, la formule de II. 2. (c) s'écrit :

$$E(X) = (s_n - 1)(B_n + 1) = n\theta_n(s_n) + (s_n - 1).$$

Les deux termes sont asymptotiquement équivalents à n/e . On obtient donc l'approximation rapide :

$$E(X) \simeq \frac{2n}{e} = \frac{600}{e} \simeq 220,7.$$

Cela correspond à environ 221 entretiens en moyenne. L'espérance porte sur tous les déroulements de la procédure, y compris ceux où les 300 candidats sont entendus sans recrutement.

5. (a) Le dénominateur de α_n est strictement positif : le seuil est au moins 2 et la somme de II. 1. (b) est positive.

Supposons $s_{n+1} = s_n = t$ et posons $q = t - 1$,

$$B = \sum_{k=q}^{n-1} 1/k.$$

Par caractérisation du seuil optimal, $B > 1$.

Les formules de probabilités donnent :

$$\theta_n(t) = \frac{q}{n}B, \quad \theta_{n+1}(t) = \frac{q}{n+1} \left(B + \frac{1}{n} \right).$$

Ainsi :

$$\alpha_n = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{nB} \right) < \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1,$$

puisque $B > 1$. L'inégalité demandée est stricte.

5. (b) Posons $t = s_n$ et $q = t - 1$. La fonction proposée s'écrit :

$$f(x) = C \frac{x + 1/n}{x + 1/q}, \quad C = \frac{t}{n+1} \frac{n}{q} > 0.$$

Sur $[0, 1]$, $x + 1/q > 0$; la fonction est continue et dérivable. On a :

$$f'(x) = C \frac{1/q - 1/n}{(x + 1/q)^2} > 0,$$

car $q = t - 1 < n$. La fonction est donc strictement croissante.

Supposons maintenant $s_{n+1} = t + 1$. Posons

$$A = \sum_{k=t}^{n-1} 1/k.$$

La caractérisation du seuil t donne $0 < A < 1$.

Les deux probabilités optimales sont :

$$\theta_n(t) = \frac{q}{n} \left(A + \frac{1}{q} \right), \quad \theta_{n+1}(t+1) = \frac{t}{n+1} \left(A + \frac{1}{n} \right).$$

Leur quotient est donc précisément $\alpha_n = f(A)$. Comme $A < 1$ et f est strictement croissante, $\alpha_n < f(1)$. Or :

$$f(1) = \frac{t}{n+1} \frac{n}{q} \frac{1 + 1/n}{1 + 1/q} = \frac{t}{n+1} \frac{n}{q} \frac{n+1}{n} \frac{q}{q+1} = 1,$$

puisque $q+1 = t$. On obtient encore $\alpha_n < 1$.

Avec 1. (c), ces deux cas couvrent tous les passages de n à $n+1$. La probabilité optimale est donc strictement décroissante en $n \geq 5$, tout en tendant vers $1/e$.

6. D'après 3. (c), $s_n/n \rightarrow 1/e$. Pour utiliser strictement la borne $1/2$, remarquons que $e > 2$, par exemple grâce à la série exponentielle $e = 1 + 1 + 1/2 + \dots$. Ainsi $1/e < 1/2$.

Il existe donc un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $s_n < n/2$. Fixons un tel n et posons $t = s_n$.

La caractérisation du seuil optimal donne

$$A = \sum_{k=t}^{n-1} 1/k < 1.$$

En passant à la somme pertinente pour le seuil $t + 1$ et le nombre de candidats $n + 2$:

$$\sum_{k=t+1}^{n+1} \frac{1}{k} = A - \frac{1}{t} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Comme $t < n/2$, on a $1/t > 2/n > 1/n + 1/(n+1)$. La somme de droite est donc strictement inférieure à A , et par conséquent strictement inférieure à 1.

Pour $n + 2$ candidats, le premier seuil dont la somme est inférieure à 1 est donc au plus $t + 1$. Autrement dit, $s_{n+2} \leq t + 1$.

Si $s_{n+1} = t + 1$, la monotonie des seuils établie en 1. (c) donne aussi $s_{n+2} \geq s_{n+1} = t + 1$. Les deux bornes imposent :

$$s_{n+2} = t + 1 = s_{n+1}.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, deux augmentations du seuil ne peuvent pas se produire à deux étapes consécutives.

Relevé des adaptations

- Partie III : restitution du numéro de partie omis dans le titre « Partie » du PDF. Les renvois originaux à III. 3 confirment cette numérotation. Aucune question ni donnée mathématique n'est modifiée.