



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 2

1985

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

On note $H_0 = 0$ et, pour $m \geq 1$,

$$H_m = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}.$$

Ainsi $u_m = H_m - \ln m$ et $v_m = H_m - \ln(m+1)$. Dans les parties II et III, $n \geq 5$ et $2 \leq s \leq n$.

Partie I

1. Signe de φ et de ψ

Les fonctions sont de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$, car $1+x > 0$. On calcule :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x},$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

La dérivée de φ est positive sur $] -1, 0[$ et négative sur $]0, +\infty[$. La fonction croît strictement jusqu'à 0, puis décroît strictement. Comme $\varphi(0) = 0$, on a :

$$\varphi(x) \leq 0 \quad \text{pour tout } x > -1, \text{ avec égalité uniquement pour } x = 0.$$

La dérivée de ψ est négative sur $] -1, 0[$ et positive sur $]0, +\infty[$. La fonction décroît strictement jusqu'à 0, puis croît strictement. Comme $\psi(0) = 0$, on a :

$$\psi(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x > -1, \text{ avec égalité uniquement pour } x = 0.$$

En particulier, pour tout $x > 0$, les inégalités sont strictes et donnent :

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

2. Monotonie des suites

Pour $n \geq 1$, on utilise $H_{n+1} - H_n = 1/(n+1)$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\psi\left(\frac{1}{n}\right) < 0.$$

La suite u est donc strictement décroissante.

De même :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = -\varphi \left(\frac{1}{n+1} \right) > 0.$$

La suite v est donc strictement croissante. Les arguments des deux fonctions sont strictement positifs, ce qui justifie les signes stricts.

3. Convergence vers une même limite

Pour tout $n \geq 1$:

$$u_n - v_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) > 0.$$

Ainsi $v_n < u_n$. La suite u est décroissante et minorée par v_1 , puisque $u_n \geq v_n \geq v_1$. La suite v est croissante et majorée par u_1 , puisque $v_n \leq u_n \leq u_1$. Le théorème de la limite monotone donne des limites réelles pour les deux suites.

Par continuité du logarithme en 1, $u_n - v_n \rightarrow 0$; les deux limites sont donc égales.

Notons cette limite a . On a, pour tout $n \geq 1$:

$$v_n \leq a \leq u_n.$$

Les suites sont adjacentes. Le calcul exact de a n'est pas demandé et n'intervient pas dans la suite du problème.

4.

(a) Un rang suffisant pour la précision 10^{-2}

Pour $n \geq 2$, la croissance de v et la décroissance de u donnent $v_{n-1} \leq a \leq u_n$. La différence entre ces deux bornes se simplifie exactement :

$$u_n - v_{n-1} = (H_n - \ln n) - (H_{n-1} - \ln n) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi :

$$|a - v_{n-1}| = a - v_{n-1} \leq \frac{1}{n}.$$

Le choix $n_0 = 100$ convient, car $n \geq 100$ implique $1/n \leq 10^{-2}$. On demande un rang suffisant, pas nécessairement le plus petit possible.

(b) Valeur approchée de a à 10^{-1} près

On reprend l'encadrement précédent avec $n = 10$:

$$v_9 \leq a \leq u_{10}, \quad u_{10} - v_9 = \frac{1}{10}.$$

Le milieu de cet intervalle est une approximation à $1/20 = 0,05$ près. Comme $H_9 = 7129/2520$ et $H_{10} = 7381/2520$, ce milieu vaut :

$$m = \frac{v_9 + u_{10}}{2} = \frac{1451}{504} - \ln 10 \simeq 0,576383.$$

En particulier, a est dans l'intervalle $[0,526383 \dots, 0,626383 \dots]$, entièrement contenu dans $[0,5, 0,7]$. Le nombre 0,6 est donc une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

Le calcul numérique du logarithme sert uniquement à donner une valeur décimale ; la garantie d'erreur vient de l'encadrement par les deux suites.

Partie II

On pose $r = s - 1$. L'échantillon initial contient r candidats, et $1 \leq r \leq n - 1$. L'univers est l'ensemble des $n!$ permutations des candidats, toutes équiprobables.

1. Probabilité de recruter le meilleur candidat

(a) Probabilités des événements E_k et $F_{k,s}$

Le meilleur candidat occupe chacune des n positions avec la même probabilité. Donc, pour $1 \leq k \leq n$:

$$P(E_k) = \frac{1}{n}.$$

Pour $s \leq k \leq n$, l'ordre relatif des $k - 1$ premiers candidats est uniforme. Le meilleur de ces candidats est donc situé avec la même probabilité à chacune de leurs $k - 1$ positions. Parmi celles-ci, $s - 1 = r$ appartiennent à l'échantillon initial. Ainsi :

$$P(F_{k,s}) = \frac{s - 1}{k - 1} = \frac{r}{k - 1}.$$

Pour $k = s$, le meilleur des $s - 1$ premiers appartient forcément à l'échantillon, et la formule donne bien $P(F_{s,s}) = 1$.

(b) Intersection et formule de $\theta_n(s)$

Il faut justifier le calcul de l'intersection, plutôt que supposer l'indépendance.

Conditionnellement à E_k , les $n - 1$ autres candidats sont uniformément répartis dans les autres positions. En particulier, les positions relatives des $k - 1$ premiers sont toujours équiprobables. Leur meilleur candidat est donc dans l'échantillon avec probabilité $r/(k - 1)$.

Ainsi :

$$P(E_k \cap F_{k,s}) = P(E_k)P(F_{k,s} | E_k) = \frac{1}{n} \frac{r}{k - 1}.$$

Sur E_k , avec $k \geq s$, le meilleur candidat est recruté exactement lorsque personne n'a été recruté avant lui. Cela équivaut à ce que le meilleur des $k - 1$ premiers soit dans l'échantillon initial : sinon, le premier candidat extérieur dépassant le niveau de l'échantillon aurait déjà été engagé.

L'événement «recruter le meilleur» est donc la réunion disjointe des $E_k \cap F_{k,s}$, pour $s \leq k \leq n$. En sommant :

$$\theta_n(s) = \sum_{k=s}^n \frac{r}{n(k-1)} = \frac{s-1}{n} \sum_{j=s-1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Cette formule vaut également pour $s = n$, où elle se réduit à $\theta_n(n) = 1/n$.

(c) Limite lorsque le seuil s est fixé

On fixe $s \geq 2$ et l'on fait tendre n vers l'infini, avec $n \geq s$. La formule précédente donne :

$$\theta_n(s) = \frac{s-1}{n} (H_{n-1} - H_{s-2}).$$

La partie I donne $H_{n-1} = \ln(n-1) + u_{n-1}$, avec $u_{n-1} \rightarrow a$. Comme H_{s-2} et s sont fixes :

$$\theta_n(s) = \frac{s-1}{n} [\ln(n-1) + u_{n-1} - H_{s-2}] \rightarrow 0.$$

On utilise ici $\ln(n-1)/n \rightarrow 0$ par croissance comparée et la bornitude de u_{n-1} . Un seuil fixe est donc asymptotiquement inefficace pour sélectionner le meilleur candidat.

2. Recrutement éventuel et nombre d'entretiens

(a) Probabilité de ne recruter personne

Aucun candidat n'est recruté exactement lorsque le meilleur des n candidats appartient à l'échantillon initial. Si le meilleur est dans l'échantillon, aucun candidat ultérieur ne peut le dépasser. S'il est en dehors, au moins un candidat dépasse le niveau de l'échantillon, et le premier de ces candidats est engagé.

La position du meilleur étant uniforme :

$$P(\text{aucun recrutement}) = \frac{s-1}{n} = \frac{r}{n}.$$

(b) Probabilité de recruter le candidat de rang j

Pour $s \leq j \leq n$, le candidat de rang j est recruté si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées : il est le meilleur des j premiers candidats, et le meilleur des $j-1$ premiers est dans l'échantillon initial.

La première condition a pour probabilité $1/j$, par uniformité des positions relatives. Conditionnellement à cette condition, le meilleur des $j-1$ premiers est toujours uniformément réparti parmi leurs positions, donc la seconde condition a pour probabilité $r/(j-1)$.

Ainsi :

$$P(\text{recruter le candidat de rang } j) = \frac{1}{j} \frac{r}{j-1} = \frac{s-1}{j(j-1)}.$$

Ces événements sont disjoints, puisqu'on recrute au plus une personne. Leur somme vaut :

$$\sum_{j=s}^n \frac{r}{j(j-1)} = r \sum_{j=s}^n \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = 1 - \frac{r}{n}.$$

On retrouve bien le complément de la probabilité d'absence de recrutement calculée en II.2(a).

(c) Loi et espérance de X

La variable X est à valeurs dans $\{s, \dots, n\}$: au moins s candidats sont entendus, car les $s - 1$ premiers sont systématiquement refusés, et au plus n candidats peuvent être entendus.

Pour $s \leq j < n$, l'événement $X = j$ correspond exactement au recrutement du candidat de rang j . Donc :

$$P(X = j) = \frac{r}{j(j-1)} \quad \text{pour } s \leq j \leq n-1.$$

Pour $j = n$, deux cas disjoints interviennent : le dernier candidat est recruté, ou personne n'est recruté. Ainsi :

$$P(X = n) = \frac{r}{n(n-1)} + \frac{r}{n} = \frac{r}{n-1}.$$

Hors de $\{s, \dots, n\}$, la probabilité est nulle. Si $s = n$, la première formule porte sur un ensemble vide et $P(X = n) = 1$, comme attendu.

La somme des probabilités vaut $r(1/r - 1/(n-1)) + r/(n-1) = 1$. La variable étant finie, son espérance existe.

Méthode 1 — Calcul à partir de la loi

On écrit :

$$E(X) = \sum_{j=s}^{n-1} j \frac{r}{j(j-1)} + n \frac{r}{n-1} = r \sum_{j=s}^{n-1} \frac{1}{j-1} + \frac{nr}{n-1}.$$

Comme $n/(n-1) = 1 + 1/(n-1)$, on regroupe le dernier terme de la somme

harmonique :

$$E(X) = r \left(\sum_{k=r}^{n-1} \frac{1}{k} + 1 \right).$$

C'est bien la formule de l'énoncé. Le terme $+1$ est à l'intérieur des parenthèses et est donc multiplié par $s - 1$.

Méthode 2 — Probabilités de poursuivre les entretiens

Pour une variable entière positive bornée par n , on a l'identité exacte

$$X = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X > k\}}.$$

En prenant l'espérance d'une somme finie, on obtient

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k).$$

Pour $0 \leq k \leq s - 1$, $P(X > k) = 1$. Pour $s \leq k \leq n - 1$, on continue après le candidat de rang k exactement lorsque aucun des k premiers n'a été engagé, c'est-à-dire lorsque leur meilleur candidat appartient à l'échantillon. Donc $P(X > k) = r/k$.

Ainsi :

$$E(X) = s + r \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} = r \left(\frac{1}{r} + \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} + 1 \right),$$

puisque $s = r + 1$. On retrouve la même expression, y compris pour $s = n$, où l'espérance vaut n .

La première méthode utilise les probabilités ponctuelles ; la seconde exploite directement la durée de la procédure et justifie la formule par les probabilités de poursuite.

Partie III

Le numéro III est rétabli dans le titre de cette partie, dont le PDF donne seulement « Partie ». Les références internes III.3 et la succession des parties identifient ce numéro sans ambiguïté.

Pour $2 \leq s \leq n$, on pose :

$$S_n(s) = \sum_{j=s-1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Ainsi $\theta_n(s) = \frac{s-1}{n} S_n(s).$

1. Existence et évolution du seuil optimal

(a) Différence de probabilités et unicité du maximum

Pour $2 \leq s \leq n-1$, posons

$$A_n(s) = \sum_{j=s}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Alors $S_n(s) = 1/(s-1) + A_n(s)$ et :

$$\theta_n(s) = \frac{1 + (s-1)A_n(s)}{n}, \quad \theta_n(s+1) = \frac{sA_n(s)}{n}.$$

En soustrayant :

$$\theta_n(s+1) - \theta_n(s) = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=s}^{n-1} \frac{1}{j} - 1 \right) = \frac{A_n(s) - 1}{n}.$$

Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans le sujet original : pour tous entiers q, r vérifiant $1 < q \leq r$, la somme

$$\sum_{j=q}^r 1/j$$

n'est pas égale à 1. On utilise ce résultat uniquement pour exclure une différence nulle et garantir l'unicité du maximum.

Les nombres $A_n(s)$ décroissent strictement avec s , car $A_n(s+1) = A_n(s) - 1/s$. À la première extrémité, pour $n \geq 5$:

$$A_n(2) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

À la dernière, $A_n(n-1) = 1/(n-1) < 1$. Il existe donc un unique premier indice $s_n \in \{3, \dots, n-1\}$ tel que $A_n(s_n) < 1$. Comme aucune somme considérée ne vaut 1, on a $A_n(s_n-1) > 1$.

La différence des probabilités est strictement positive pour $2 \leq s < s_n$ et strictement négative pour $s_n \leq s \leq n-1$. La suite finie $\theta_n(2), \dots, \theta_n(n)$ croît donc strictement jusqu'à s_n , puis décroît strictement. Son maximum est atteint en ce seul indice.

La caractérisation obtenue est exactement :

$$\sum_{j=s_n}^{n-1} \frac{1}{j} < 1, \quad \sum_{j=s_n-1}^{n-1} \frac{1}{j} > 1.$$

On a même montré $s_n \geq 3$, précision utile pour appliquer III.2(a).

(b) Seuils pour $n = 5, 6, 7, 8$

On vérifie les deux inégalités caractérisant le maximum, à l'aide de fractions exactes.

n	s_n	Somme de s_n à $n - 1$	Somme de $s_n - 1$ à $n - 1$
5	3	$7/12 < 1$	$13/12 > 1$
6	3	$47/60 < 1$	$77/60 > 1$
7	3	$19/20 < 1$	$29/20 > 1$
8	4	$319/420 < 1$	$153/140 > 1$

L'unicité prouvée en III.1(a) permet de conclure : $s_5 = s_6 = s_7 = 3$ et $s_8 = 4$.

(c) Le seuil augmente d'au plus une unité

Posons $s = s_n$ et

$$A = \sum_{j=s}^{n-1} 1/j < 1.$$

À l'effectif $n + 1$, on a :

$$\sum_{j=s-1}^n \frac{1}{j} = \sum_{j=s-1}^{n-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{n} > 1.$$

Le seuil optimal ne peut donc pas être inférieur à s , par sa caractérisation.

D'autre part :

$$\sum_{j=s+1}^n \frac{1}{j} = A - \frac{1}{s} + \frac{1}{n} < A < 1,$$

car $s \leq n - 1$, donc $1/n < 1/s$. Le seuil optimal ne peut donc pas dépasser $s + 1$.

Plus explicitement, si

$$\sum_{j=s}^n 1/j < 1,$$

les deux inégalités caractérisent le seuil s . Si cette somme est supérieure à 1, elles caractérisent le seuil $s + 1$. Le cas d'égalité est exclu par le résultat admis, puisque $s \geq 3$.

Ainsi $s_{n+1} = s_n$ ou $s_{n+1} = s_n + 1$.

2. Minoration du seuil optimal

(a) Deux minoration de sommes harmoniques

Soit $q > 1$ entier. La somme

$$\sum_{j=q+1}^{2q} 1/j$$

comporte q termes. Chacun est supérieur ou égal à $1/(2q)$, et au moins un est strictement supérieur, car $q + 1 < 2q$. Donc :

$$\sum_{j=q+1}^{2q} \frac{1}{j} > q \frac{1}{2q} = \frac{1}{2}.$$

En appliquant la même propriété à l'entier $2q > 1$:

$$\sum_{j=2q+1}^{4q} \frac{1}{j} > \frac{1}{2}.$$

Les deux blocs sont consécutifs ; leur somme donne :

$$\sum_{j=q+1}^{4q} \frac{1}{j} > 1.$$

La condition $q > 1$ est nécessaire à la stricte inégalité du premier bloc : pour $q = 1$, ce bloc se réduirait à $1/2$.

(b) Borne inférieure de $s_n - 1$

Posons $q = s_n - 1$. D'après III.1(a), $s_n \geq 3$, donc $q > 1$. Supposons, par l'absurde, $q \leq (n-1)/4$, soit $4q \leq n-1$.

Les termes étant positifs, la caractérisation du seuil et III.2(a) donneraient :

$$\sum_{j=s_n}^{n-1} \frac{1}{j} = \sum_{j=q+1}^{n-1} \frac{1}{j} \geq \sum_{j=q+1}^{4q} \frac{1}{j} > 1,$$

alors que cette somme doit être strictement inférieure à 1. Cette contradiction prouve :

$$s_n - 1 > \frac{n-1}{4}.$$

En particulier, $s_n - 1 \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Comportement asymptotique du seuil et du maximum

On pose $r_n = s_n - 1$ et

$$B_n = \sum_{j=r_n}^{n-1} 1/j.$$

Tous ces indices sont positifs et $r_n \rightarrow +\infty$ d'après III.2(b).

(a) Limite des sommes et de la probabilité renormalisée

La caractérisation de III.1(a) donne $B_n > 1$ et $B_n - 1/r_n < 1$, donc :

$$1 < B_n < 1 + \frac{1}{r_n}.$$

En ajoutant le dernier terme $1/n$:

$$1 < \sum_{j=r_n}^n \frac{1}{j} < 1 + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{n}.$$

Comme $r_n \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement donne :

$$\sum_{j=s_n-1}^n \frac{1}{j} \rightarrow 1.$$

Enfin la formule de la probabilité donne :

$$\frac{n}{s_n - 1} \theta_n(s_n) = B_n = \sum_{j=r_n}^n \frac{1}{j} - \frac{1}{n} \rightarrow 1.$$

Le terme final $1/n$ est donc bien retiré lorsqu'on passe de la somme de l'énoncé à la formule de θ_n .

(b) Comparaison avec le logarithme

Méthode 1 — Utilisation de la partie I

Comme $r_n \geq 2$, on peut employer les termes v_{r_n-1} et v_{n-1} . On a :

$$B_n = H_{n-1} - H_{r_n-1},$$

$$H_{n-1} = v_{n-1} + \ln n, \quad H_{r_n-1} = v_{r_n-1} + \ln r_n.$$

Ainsi :

$$B_n - \ln \frac{n}{r_n} = v_{n-1} - v_{r_n-1}.$$

La partie I donne $v_m \rightarrow a$. Les indices $n-1$ et r_n-1 tendent tous deux vers l'infini, donc les deux termes à droite tendent vers a , et leur différence tend vers 0. En utilisant

$$B_n = \frac{n}{s_n-1} \theta_n(s_n) :$$

$$\frac{n}{s_n-1} \theta_n(s_n) - \ln \frac{n}{s_n-1} \rightarrow 0.$$

Méthode 2 — Comparaison somme-intégrale

La fonction $t \mapsto 1/t$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour chaque entier $j \geq 1$,

$$\int_j^{j+1} dt/t \leq 1/j. \text{ En sommant de } j = r_n \text{ à } n-1 :$$

$$\ln \frac{n}{r_n} = \int_{r_n}^n \frac{dt}{t} \leq B_n.$$

Pour $j \geq r_n + 1$, $1/j \leq \int_{j-1}^j dt/t$. En isolant le premier terme :

$$B_n \leq \frac{1}{r_n} + \int_{r_n}^{n-1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{r_n} + \ln \frac{n-1}{r_n}.$$

On en déduit :

$$0 \leq B_n - \ln \frac{n}{r_n} \leq \frac{1}{r_n} + \ln \frac{n-1}{n} \leq \frac{1}{r_n} \rightarrow 0.$$

Les intégrales sont toutes sur des segments de $]0, +\infty[$; aucune intégrale impropre ni permutation de limite et d'intégrale n'est utilisée.

La première méthode suit la consigne et exploite l'annulation de la constante limite dans une différence; la seconde fournit directement une borne d'erreur par les rectangles associés à une fonction décroissante.

(c) Limite du seuil relatif et de la probabilité maximale

D'après III.3(a), $B_n \rightarrow 1$, et d'après III.3(b), $B_n - \ln(n/r_n) \rightarrow 0$. Par soustraction de suites réelles convergentes :

$$\ln \frac{n}{r_n} \rightarrow 1.$$

La continuité de l'exponentielle donne $n/r_n \rightarrow e$. Tous les quotients sont positifs, donc $r_n/n \rightarrow 1/e$.

Comme $s_n = r_n + 1$ et $r_n \rightarrow +\infty$, $r_n/s_n \rightarrow 1$. Ainsi :

$$\frac{n}{s_n} = \frac{n}{r_n} \frac{r_n}{s_n} \rightarrow e.$$

Enfin :

$$\theta_n(s_n) = \frac{r_n}{n} B_n \rightarrow \frac{1}{e}.$$

On obtient donc $s_n/n \rightarrow 1/e$ et une probabilité maximale tendant vers $1/e \simeq 0,367879$. Il s'agit ici de limites de suites réelles ordinaires.

4. Application à 300 candidats

Les résultats précédents fournissent des approximations asymptotiques ; aucune estimation d'erreur n'est demandée dans cette question.

(a) Choix du seuil

La relation $n/(s_n - 1) \rightarrow e$ suggère $s_n - 1 \simeq n/e$. Pour $n = 300$:

$$s_{300} \simeq 1 + \frac{300}{e} \simeq 111,36.$$

On peut donc choisir approximativement $s = 111$, c'est-à-dire refuser les 110 premiers candidats, puis engager le premier candidat ultérieur qui dépasse tous ceux de l'échantillon.

La relation moins précise $s_n \sim n/e$ donne environ 110 pour le seuil ; à elle seule, une équivalence ne fixe pas l'arrondi optimal. Le choix 111 est celui fourni par la forme tenant compte des $s_n - 1$ candidats de l'échantillon, et il est confirmé par le calcul direct ci-dessous.

(b) Probabilité maximale

La limite obtenue en III.3(c) donne l'approximation :

$$\theta_{300}(s_{300}) \simeq \frac{1}{e} \simeq 0,368.$$

La probabilité est donc d'environ 36,8 %.

(c) Nombre moyen de candidats entendus

D'après II.2(c), au seuil optimal :

$$E(X) = r_n(B_n + 1).$$

Comme $r_n/n \rightarrow 1/e$ et $B_n \rightarrow 1$, on a $E(X)/n \rightarrow 2/e$. Pour $n = 300$:

$$E(X) \simeq \frac{600}{e} \simeq 220,73.$$

Il faut donc prévoir environ 221 entretiens en moyenne.

Voici un contrôle numérique direct utilisant la caractérisation de III.1(a). Le code ne simule pas la procédure ; il calcule les sommes de la formule exacte, avec des nombres flottants.

Python

```
def recrutement_optimal(n):
    s = 2
    somme = 0.0
    for j in range(2, n):
        somme = somme + 1.0 / j
    while somme > 1.0:
        somme = somme - 1.0 / s
        s = s + 1
    r = s - 1
    somme_totale = somme + 1.0 / r
    probabilite = (r / n) * somme_totale
    esperance = r * (somme_totale + 1.0)
    return s, probabilite, esperance
```

Au début de chaque test de la boucle, somme représente

$$\sum_{j=s}^{n-1} 1/j.$$

Tant que cette somme est supérieure à 1, la probabilité augmente lorsqu'on relève le seuil ; on retire son premier terme et on avance de 1. À l'arrêt, on a trouvé le premier seuil où la somme est inférieure à 1. Le résultat admis exclut l'égalité dans le calcul mathématique exact. Pour les valeurs testées, le passage du seuil a aussi été vérifié à l'aide de fractions exactes, afin de contrôler les décisions prises en flottants.

Le code a été exécuté pour $n = 5, 6, 7, 8, 300$. Les quatre premiers seuils sont ceux de III.1(b). Pour $n = 300$, il renvoie :

$$s_{300} = 111, \quad \theta_{300}(111) \simeq 0,3689351812, \quad E(X) \simeq 220,6805544.$$

Ces valeurs confirment les approximations rapides demandées. Les calculs rationnels ont confirmé que les deux sommes caractérisant $s_{300} = 111$ sont strictement de part et d'autre de 1.

5. Décroissance de la probabilité maximale

Le quotient α_n est bien défini et positif : la formule II.1(b) donne $\theta_n(s_n) > 0$.

(a) Cas $s_{n+1} = s_n$

Posons $r = s_n - 1$ et

$$B = \sum_{j=r}^{n-1} 1/j.$$

La caractérisation du seuil donne $B > 1$. Lorsque le seuil reste le même :

$$\theta_n(s_n) = \frac{r}{n} B, \quad \theta_{n+1}(s_{n+1}) = \frac{r}{n+1} \left(B + \frac{1}{n} \right).$$

En divisant par la probabilité strictement positive :

$$\alpha_n = \frac{n}{n+1} \frac{B+1/n}{B} = \frac{nB+1}{(n+1)B}.$$

Comme $B > 1$, $nB+1 < nB+B = (n+1)B$. Ainsi $\alpha_n < 1$.

(b) Cas $s_{n+1} = s_n + 1$

Méthode 1 — Fonction auxiliaire imposée

Sur $[0, 1]$, posons $r = s_n - 1$. La fonction de l'énoncé s'écrit :

$$f(x) = C \frac{x+1/n}{x+1/r}, \quad C = \frac{r+1}{n+1} \frac{n}{r} > 0.$$

Le dénominateur est strictement positif sur l'intervalle. On peut donc dériver :

$$f'(x) = C \frac{1/r - 1/n}{(x+1/r)^2} > 0,$$

car $r = s_n - 1 \leq n - 2 < n$. La fonction est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Son extrémité supérieure se simplifie :

$$f(1) = \frac{r+1}{n+1} \frac{n}{r} \frac{1+1/n}{1+1/r} = 1.$$

Posons maintenant

$$A = \sum_{j=s_n}^{n-1} 1/j.$$

La caractérisation du seuil donne $0 < A < 1$. Si $s_{n+1} = s_n + 1$, les deux probabilités sont :

$$\theta_n(s_n) = \frac{r}{n} \left(A + \frac{1}{r} \right), \quad \theta_{n+1}(s_n + 1) = \frac{r+1}{n+1} \left(A + \frac{1}{n} \right).$$

Leur quotient est donc $\alpha_n = f(A)$. La stricte croissance et $A < 1$ donnent $\alpha_n = f(A) < f(1) = 1$.

Méthode 2 — Différence directe des probabilités

Avec les mêmes notations, on développe la différence :

$$\theta_n(s_n) - \theta_{n+1}(s_{n+1}) = \frac{r(n+1)(A + 1/r) - n(r+1)(A + 1/n)}{n(n+1)}.$$

Le numérateur se regroupe en :

$$[r(n+1) - n(r+1)]A + (n+1) - (r+1) = (n-r)(1-A) > 0.$$

La différence est donc strictement positive. Comme $\theta_n(s_n) > 0$, cela entraîne encore $\alpha_n < 1$.

La première méthode suit l'indication et compare le quotient à une valeur extrême ; la seconde établit directement la baisse de la probabilité maximale.

Par III.1(c), les deux cas de III.5(a) et III.5(b) sont les seuls possibles. La suite des probabilités maximales $\theta_n(s_n)$ est donc strictement décroissante pour $n \geq 5$, et elle converge vers $1/e$ d'après III.3(c).

6. Absence de deux augmentations consécutives pour n assez grand

On utilise la limite $n/s_n \rightarrow e$ et la caractérisation des seuils. Comme $e > 2$, il existe un entier N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$:

$$\frac{n}{s_n} > 2, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{s_n} > \frac{2}{n} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

L'inégalité $e > 2$ peut par exemple se déduire de la série exponentielle autorisée :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k! > 1 + 1 = 2.$$

Fixons $n \geq N_0$ et supposons $s_{n+1} = s_n + 1$. Posons $s = s_n$ et

$$A = \sum_{j=s}^{n-1} 1/j < 1.$$

À l'effectif $n + 1$, le seuil est $s + 1$; sa caractérisation donne :

$$\sum_{j=s}^n \frac{1}{j} = A + \frac{1}{n} > 1.$$

À l'effectif $n + 2$, la somme partant de s est donc encore strictement supérieure à 1 :

$$\sum_{j=s}^{n+1} \frac{1}{j} = A + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > 1.$$

La somme partant de $s + 1$ vaut :

$$\sum_{j=s+1}^{n+1} \frac{1}{j} = A - \frac{1}{s} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < A < 1,$$

par l'inégalité sur $1/s_n$ obtenue au début de la preuve.

Ces deux sommes sont précisément celles qui caractérisent le seuil $s + 1$ à l'effectif $n + 2$.

Par unicité, $s_{n+2} = s + 1 = s_{n+1}$.

Ainsi, pour tout n suffisamment grand, une augmentation du seuil est suivie d'une étape où il reste constant. La démonstration ne prétend pas déterminer le plus petit rang à partir duquel cette propriété est vraie.

Relevé des adaptations

- III, titre de partie : rétablissement du numéro III, absent du titre dans le PDF mais identifié par la succession des parties et les références internes.

Aucune adaptation mathématique au programme n'est nécessaire. Toutes les questions sont conservées. Le résultat sur les sommes harmoniques différentes de 1 est déjà admis dans le sujet original ; aucune autre admission n'est ajoutée.