



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1984

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

Partie 1

On désigne par E_a l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+3} = 4(1+a)u_{n+2} - (1+4a)u_{n+1} + u_n. \quad (1)$$

1. (a) Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
1. (b) En considérant l'application de E_a dans $\mathbb{R}^3$ qui à toute suite associe (u_0, u_1, u_2) , calculer la dimension de E_a .
2. (a) Vérifier que l'espace vectoriel K des suites constantes est inclus dans E_a .
2. (b) Soit $u \in E_a$. On considère la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Établir une relation de récurrence (2) satisfaite par v , reliant v_{n+2} , v_{n+1} et v_n .

2. (c) On désigne par F_a l'ensemble des suites réelles satisfaisant la relation (2). Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E_a . Déterminer une base de F_a .

On sera amené à distinguer trois cas : $0 \leq a < 1$, $a = 1$, $a > 1$. Dans le premier cas, on posera $a = \cos \theta$, avec $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$; dans le dernier cas, on posera $a = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$, avec $\theta > 0$.

2. (d) Montrer qu'il existe une valeur a_0 de a et une seule, que l'on calculera, pour laquelle K est inclus dans F_a .

2. (e) On suppose $a \neq a_0$. Montrer que E_a est somme directe de K et de F_a .

En déduire, dans chacun des trois cas envisagés en (c), une base de E_a .

2. (f) Montrer que E_{a_0} contient la suite de terme général $u_n = n$. En déduire une base de E_{a_0} .

3. Soit u l'élément de E_a déterminé par les conditions initiales

$$u_0 = 1 - \sqrt{|a^2 - 1|}, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{|a^2 - 1|}.$$

Calculer u_n en fonction de n . On discutera suivant la valeur de a .

Étudier la convergence de u et calculer la limite de cette suite lorsqu'elle existe.

Partie 2

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et par I_3 la matrice unité. On donne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -a - \frac{1}{4} & a + 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres réelles de M . Lorsque $a \neq 1$, exprimer ces valeurs propres à l'aide du nombre θ introduit dans la partie 1.

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Lorsque M est diagonalisable, trouver une matrice carrée inversible P telle que $D = P^{-1}MP$ soit diagonale. Expliciter D .

3. Pour tout polynôme réel

$$Q(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k,$$

on pose

$$Q(M) = \sum_{k=0}^m a_k M^k, \quad M^0 = I_3.$$

On admet que, pour tout couple (Q_1, Q_2) de polynômes réels,

$$(Q_1 Q_2)(M) = Q_1(M) Q_2(M).$$

On admet aussi que

$$\delta_M(X) = 4X^3 - 4(a+1)X^2 + (4a+1)X - 1$$

est un polynôme annulateur de M , c'est-à-dire que $\delta_M(M) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de nombres réels et un seul tel que

$$M^n = \alpha_n M^2 + \beta_n M + \gamma_n I_3.$$

Expliciter ce triplet dans chacun des cas $a = \frac{5}{4}$ et $a = 1$.

Dans ces deux cas, retrouver le résultat de la question 1.3.