



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**HEC / ESCP**

**Mathématiques 2**

**1984**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## Partie 1

---

Dans toute cette partie,  $a \geq 0$  est fixé et  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

### 1. (a)

On vérifie la stabilité par combinaison linéaire. La suite nulle satisfait (1). Si  $u, w \in E_a$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , la linéarité de chaque terme de la relation donne, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$4(\lambda u_{n+3} + \mu w_{n+3}) = 4(1+a)(\lambda u_{n+2} + \mu w_{n+2}) - (1+4a)(\lambda u_{n+1} + \mu w_{n+1}) + \lambda u_n + \mu w_n.$$

Ainsi  $\lambda u + \mu w \in E_a$ . Par conséquent,  $E_a$  est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.

### 1. (b)

Considérons l'application linéaire

$$\Phi : E_a \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad u \longmapsto (u_0, u_1, u_2).$$

La relation (1) s'écrit

$$u_{n+3} = (1+a)u_{n+2} - \left(a + \frac{1}{4}\right)u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Trois termes initiaux donnés déterminent donc successivement tous les termes suivants. En particulier, une suite de  $E_a$  dont les trois premiers termes sont nuls est identiquement nulle :  $\Phi$  est injective.

Réciproquement, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on construit une suite en posant  $u_0 = x$ ,  $u_1 = y$ ,  $u_2 = z$ , puis en appliquant la formule précédente pour chaque  $n \geq 0$ . Cette suite appartient à  $E_a$  et a pour image  $(x, y, z) : \Phi$  est surjective.

Ainsi  $\Phi$  est un isomorphisme et

$$\dim E_a = 3.$$

2. (a)

Pour une suite constante  $u_n = c$ , le membre de droite de (1) vaut

$$[4(1 + a) - (1 + 4a) + 1]c = 4c.$$

C'est le membre de gauche. Toute suite constante appartient donc à  $E_a$ , d'où  $K \subset E_a$ .

On note  $\mathbf{1} = (1)_{n \geq 0}$ ; alors  $K = \text{Vect}(\mathbf{1})$  et  $\dim K = 1$ .

2. (b)

On regroupe les différences présentes dans (1) :

$$4v_{n+2} - 4av_{n+1} + v_n = 4(u_{n+3} - u_{n+2}) - 4a(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_{n+1} - u_n.$$

Le membre de droite est

$$4u_{n+3} - 4(1 + a)u_{n+2} + (1 + 4a)u_{n+1} - u_n = 0.$$

La relation recherchée est donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4v_{n+2} = 4av_{n+1} - v_n. \quad (2)$$

2. (c)

La relation (2) est linéaire et homogène; le même argument qu'en 1(a) montre que  $F_a$  est un sous-espace de l'espace des suites réelles.

Si  $w \in F_a$ , les relations aux rangs  $n + 1$  et  $n$  donnent

$$4w_{n+3} - 4aw_{n+2} + w_{n+1} = 0, \quad 4w_{n+2} - 4aw_{n+1} + w_n = 0.$$

En soustrayant la seconde de la première, on obtient (1) pour  $w$ . Ainsi  $F_a \subset E_a$  et  $F_a$  est un sous-espace vectoriel de  $E_a$ .

L'application  $w \mapsto (w_0, w_1)$  est un isomorphisme de  $F_a$  sur  $\mathbb{R}^2$  : la relation  $w_{n+2} = aw_{n+1} - \frac{1}{4}w_n$  construit une unique suite pour toute paire initiale, exactement comme en 1(b). Donc  $\dim F_a = 2$ . Il suffit, dans chaque cas, de construire deux suites de  $F_a$  linéairement indépendantes.

Cas  $0 \leq a < 1$ .

Il existe un unique  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $a = \cos \theta$ , car le cosinus est continu et strictement décroissant sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Posons

$$c_n = 2^{-n} \cos(n\theta), \quad s_n = 2^{-n} \sin(n\theta).$$

Les formules d'addition donnent, pour  $f = \cos$  et pour  $f = \sin$ ,

$$f((n+2)\theta) + f(n\theta) = 2 \cos \theta f((n+1)\theta).$$

En multipliant cette égalité par  $2^{-n}$ , on obtient  $4w_{n+2} + w_n = 4aw_{n+1}$  pour chacune des suites  $c$  et  $s$ . Elles appartiennent donc à  $F_a$ .

Si  $Ac + Bs = 0$ , le terme de rang 0 donne  $A = 0$ , puis le terme de rang 1 donne  $B \sin \theta/2 = 0$ . Comme  $\sin \theta > 0$ , on a  $B = 0$ . La famille est libre et contient deux éléments de l'espace de dimension 2; c'est une base :

$$\mathcal{B}_{F_a} = \left( (2^{-n} \cos(n\theta))_{n \geq 0}, (2^{-n} \sin(n\theta))_{n \geq 0} \right).$$

Cette preuve utilise uniquement des identités trigonométriques réelles et la dimension de  $F_a$ .

Cas  $a = 1$ .

Posons  $p_n = 2^{-n}$  et  $q_n = n2^{-n}$ . Pour  $p$ , la relation (2) résulte de  $4(1/2)^2 - 4(1/2) + 1 = 0$ . Pour  $q$ , on vérifie directement

$$4q_{n+2} - 4q_{n+1} + q_n = 2^{-n}[(n+2) - 2(n+1) + n] = 0.$$

La famille  $(p, q)$  est libre : ses termes de rang 0 imposent le premier coefficient nul, puis ses termes de rang 1 imposent le second nul. Donc

$$\mathcal{B}_{F_1} = \left( (2^{-n})_{n \geq 0}, (n2^{-n})_{n \geq 0} \right).$$

Cas  $a > 1$ .

Posons  $d = \sqrt{a^2 - 1}$  et  $\theta = \ln(a + d)$ . On a  $a + d > 1$ , donc  $\theta > 0$ , et  $(a + d)(a - d) = 1$ . Ainsi  $e^\theta = a + d$ ,  $e^{-\theta} = a - d$ , et

$$a = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}.$$

Définissons

$$r_+ = \frac{a + d}{2} = \frac{e^\theta}{2}, \quad r_- = \frac{a - d}{2} = \frac{e^{-\theta}}{2}.$$

Ces deux nombres réels distincts vérifient  $4r^2 - 4ar + 1 = 0$ . Les suites  $(r_+^n)$  et  $(r_-^n)$

satisfont donc (2). Si  $Ar_+^n + Br_-^n = 0$  pour tout  $n$ , les rangs 0 et 1 donnent  $A + B = 0$ ,  $Ar_+ + Br_- = 0$ , puis  $A(r_+ - r_-) = 0$ . On en déduit  $A = B = 0$ . Donc

$$\mathcal{B}_{F_a} = \left( (r_+^n)_{n \geq 0}, (r_-^n)_{n \geq 0} \right).$$

## 2. (d)

Une suite constante  $w_n = c$  vérifie (2) si et seulement si

$$(5 - 4a)c = 0.$$

Pour que toutes les suites constantes appartiennent à  $F_a$ , il faut et il suffit que  $5 - 4a = 0$ . L'unique valeur recherchée est

$$a_0 = \frac{5}{4}.$$

## 2. (e)

### Méthode 1 — Intersection et dimensions.

---

Supposons  $a \neq \frac{5}{4}$ . Une suite de  $K \cap F_a$  est constante et satisfait  $(5 - 4a)c = 0$ . Son terme constant est donc nul, ce qui montre  $K \cap F_a = \{0\}$ . Par conséquent,

$$\dim(K + F_a) = \dim K + \dim F_a - \dim(K \cap F_a) = 1 + 2 = 3.$$

Comme  $K + F_a \subset E_a$  et  $\dim E_a = 3$ , on obtient

$$E_a = K \oplus F_a.$$

## Méthode 2 — Construction explicite de la décomposition.

Pour  $u \in E_a$ , posons  $b_n = 4u_{n+2} - 4au_{n+1} + u_n$ . La relation (1) donne  $b_{n+1} - b_n = 0$ ; la suite  $b$  est donc constante, égale à  $b_0$ .

Comme  $5 - 4a \neq 0$ , le réel  $c = b_0/(5 - 4a)$  est bien défini. La suite  $w_n = u_n - c$  vérifie

$$4w_{n+2} - 4aw_{n+1} + w_n = b_0 - (5 - 4a)c = 0.$$

Ainsi  $w \in F_a$  et  $u = c\mathbf{1} + w$ . Cette décomposition est unique, puisque deux décompositions auraient une différence dans  $K \cap F_a = \{0\}$ . Elle établit à nouveau  $E_a = K \oplus F_a$ .

La première méthode exploite les dimensions; la seconde donne directement la composante constante d'une suite à partir de ses trois premiers termes.

On ajoute maintenant  $\mathbf{1}$  à chacune des bases obtenues en 2(c). Les bases de  $E_a$  sont :

Pour  $0 \leq a < 1$ ,

$$\left( \mathbf{1}, (2^{-n} \cos(n\theta))_{n \geq 0}, (2^{-n} \sin(n\theta))_{n \geq 0} \right).$$

Pour  $a = 1$ ,

$$\left( \mathbf{1}, (2^{-n})_{n \geq 0}, (n2^{-n})_{n \geq 0} \right).$$

Pour  $a > 1$  et  $a \neq \frac{5}{4}$ ,

$$\left( \mathbf{1}, (r_+^n)_{n \geq 0}, (r_-^n)_{n \geq 0} \right).$$

2. (f)

Rectification de l'énoncé original : la suite  $u_n = n$  appartient à  $E_{a_0}$  ; elle n'appartient pas à  $E_a$  pour une valeur quelconque de  $a$ .

En effet, pour cette suite, la différence entre le membre de gauche et le membre de droite de (1) est

$$4(n+3) - 4(1+a)(n+2) + (1+4a)(n+1) - n = 5 - 4a.$$

Elle est nulle exactement lorsque  $a = \frac{5}{4}$ . Pour cette valeur,  $\sqrt{a^2 - 1} = \frac{3}{4}$ , d'où  $r_+ = 1$  et  $r_- = \frac{1}{4}$ . Les suites  $\mathbf{1}$  et  $(4^{-n})$  appartiennent à  $F_{5/4} \subset E_{5/4}$ , et la suite  $(n)$  appartient aussi à  $E_{5/4}$ .

Pour montrer que ces trois suites sont libres, supposons  $A + Bn + C4^{-n} = 0$  pour tout  $n$ . Aux rangs 0, 1, 2, on obtient

$$A + C = 0, \quad A + B + \frac{C}{4} = 0, \quad A + 2B + \frac{C}{16} = 0.$$

La première équation donne  $A = -C$ , la deuxième  $B = \frac{3}{4}C$ , et la troisième devient  $\frac{9}{16}C = 0$ . Donc  $A = B = C = 0$ . Comme  $\dim E_{5/4} = 3$ , une base est

$$\left( \mathbf{1}, (n)_{n \geq 0}, (4^{-n})_{n \geq 0} \right).$$

3.

On utilise l'unicité d'une suite de  $E_a$  connaissant ses trois termes initiaux, établie en 1(b). Il suffit de construire une suite de  $E_a$  qui possède les valeurs demandées.

Cas  $0 \leq a < 1$ .

Avec  $a = \cos \theta$  et  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , on a  $\sqrt{|a^2 - 1|} = \sin \theta$ . La formule d'addition

$$\sin((n-1)\theta) = \sin(n\theta) \cos \theta - \cos(n\theta) \sin \theta$$

montre que la suite  $(2^{-n} \sin((n-1)\theta))$  appartient à  $F_a$ . En ajoutant la suite constante 1, on obtient une suite de  $E_a$ . Ses trois premiers termes sont  $1 - \sin \theta$ ,  $1$ ,  $1 + \sin \theta/4$ . Par unicité,

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = 1 + 2^{-n} \sin((n-1)\theta).$$

Cas  $a = 1$ .

Les trois termes initiaux valent 1. La suite constante 1 appartient à  $E_1$ , donc

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = 1.$$

Cas  $a > 1$ .

Avec les notations de 2(c), on a  $\sqrt{a^2 - 1} = (e^\theta - e^{-\theta})/2$ . La suite

$$w_n = \frac{e^{(n-1)\theta} - e^{-(n-1)\theta}}{2^{n+1}} = \frac{e^{-\theta}}{2} r_+^n - \frac{e^\theta}{2} r_-^n$$

est une combinaison linéaire des deux suites de la base de  $F_a$ . La suite  $1 + w_n$  appartient donc à  $E_a$ . Ses premiers termes sont

$$1 + w_0 = 1 - \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad 1 + w_1 = 1, \quad 1 + w_2 = 1 + \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{8}.$$

Ils coïncident avec les valeurs prescrites. Ainsi

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = 1 + \frac{e^{(n-1)\theta} - e^{-(n-1)\theta}}{2^{n+1}}.$$

Cette formule reste valable pour  $a = \frac{5}{4}$ , même si la somme directe de 2(e) ne s'applique pas. Dans ce cas,  $e^\theta = 2$ , donc

$$u_n = \frac{5}{4} - 4^{-n}.$$

Étude de la convergence.

Pour  $0 \leq a < 1$ , l'inégalité  $|u_n - 1| \leq 2^{-n}$  montre que  $u_n \rightarrow 1$ . Pour  $a = 1$ , la suite est constante et converge aussi vers 1.

Pour  $a > 1$ , on a  $0 < r_- < \frac{1}{2}$ , donc  $r_-^n \rightarrow 0$ . La fonction  $t \mapsto (e^t + e^{-t})/2$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , car sa dérivée y est  $(e^t - e^{-t})/2 > 0$ . Sa valeur en  $t = \ln 2$  est  $\frac{5}{4}$ . Il s'ensuit que

$$r_+ < 1 \iff a < \frac{5}{4}, \quad r_+ = 1 \iff a = \frac{5}{4}, \quad r_+ > 1 \iff a > \frac{5}{4}.$$

Si  $1 < a < \frac{5}{4}$ , les deux suites géométriques tendent vers 0, donc  $u_n \rightarrow 1$ . Si  $a = \frac{5}{4}$ , la formule  $u_n = \frac{5}{4} - 4^{-n}$  donne la limite  $\frac{5}{4}$ . Si  $a > \frac{5}{4}$ , le coefficient  $e^{-\theta}/2$  de  $r_+^n$  est strictement positif, donc  $u_n \rightarrow +\infty$ .

La suite converge dans  $\mathbb{R}$  exactement pour  $0 \leq a \leq \frac{5}{4}$ , avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq a < \frac{5}{4}, \\ \frac{5}{4} & \text{si } a = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Pour  $a > \frac{5}{4}$ , elle diverge vers  $+\infty$ .

## Partie 2

Les matrices et les valeurs propres étudiées dans cette version sont réelles. Les questions 1 et 2 ont été reformulées pour respecter ce cadre.

1.

On détermine les valeurs propres en résolvant directement  $MX = \lambda X$ . Pour  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,

ce système est

$$y = \lambda x, \quad z = \lambda y, \quad \frac{1}{4}x - \left(a + \frac{1}{4}\right)y + (a+1)z = \lambda z.$$

Si  $x = 0$ , les deux premières équations imposent  $y = z = 0$ . Un vecteur propre a donc  $x \neq 0$ . En remplaçant  $y$  par  $\lambda x$  et  $z$  par  $\lambda^2 x$  dans la dernière équation puis en divisant par  $x$ , on obtient

$$4\lambda^3 - 4(a+1)\lambda^2 + (4a+1)\lambda - 1 = 0.$$

Réciproquement, toute solution réelle  $\lambda$  de cette équation fournit le vecteur propre non nul

$$V(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

La factorisation

$$4X^3 - 4(a+1)X^2 + (4a+1)X - 1 = (X-1)(4X^2 - 4aX + 1)$$

donne donc exactement les valeurs propres réelles.

Si  $0 \leq a < 1$ , on a

$$4X^2 - 4aX + 1 = 4\left(X - \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - a^2 > 0$$

pour tout réel  $X$ . L'unique valeur propre réelle est 1, indépendamment de  $\theta$ .

Si  $a = 1$ , le facteur du second degré est  $(2X - 1)^2$ . Les valeurs propres sont 1 et  $\frac{1}{2}$ .

Si  $a > 1$ , les valeurs propres sont les nombres de l'ensemble

$$\{1, r_+, r_-\}, \quad r_+ = \frac{e^\theta}{2}, \quad r_- = \frac{e^{-\theta}}{2}.$$

Ces trois nombres sont distincts sauf lorsque  $a = \frac{5}{4}$ , où  $r_+ = 1$  et  $r_- = \frac{1}{4}$ . Dans ce cas, les valeurs propres sont 1 et  $\frac{1}{4}$ .

Dans tous les cas, la résolution du système montre en outre que, pour toute valeur propre  $\lambda$ ,

$$\text{Ker}(M - \lambda I_3) = \text{Vect}(V(\lambda)).$$

Chaque espace propre est donc de dimension 1.

2.

Une matrice réelle d'ordre 3 est diagonalisable si et seulement si elle possède une base de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres, c'est-à-dire si la somme des dimensions de ses espaces propres réels vaut 3.

Pour  $0 \leq a < 1$ , cette somme vaut 1. Pour  $a = 1$  et pour  $a = \frac{5}{4}$ , elle vaut 2. La matrice n'est donc diagonalisable dans aucun de ces cas.

Pour  $a > 1$  avec  $a \neq \frac{5}{4}$ , il existe trois valeurs propres réelles distinctes. Les vecteurs propres associés sont linéairement indépendants ; ils forment donc une base de  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi

$$M \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \iff a > 1 \text{ et } a \neq \frac{5}{4}.$$

Dans ces cas, posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_+ & r_- \\ 1 & r_+^2 & r_-^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_+ & 0 \\ 0 & 0 & r_- \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de  $P$  sont respectivement  $V(1)$ ,  $V(r_+)$  et  $V(r_-)$  ; leur indépendance justifie l'inversibilité de  $P$ . Les relations de vecteurs propres donnent  $MP = PD$ , puis, en multipliant à gauche par  $P^{-1}$ ,

$$P^{-1}MP = D.$$

Aucun calcul de déterminant n'est nécessaire.

3.

Existence et unicité du triplet.

On utilise le polynôme annulateur fourni dans l'énoncé. La division euclidienne de  $X^n$  par  $\delta_M$ , de degré 3, donne des polynômes réels  $S_n$  et  $R_n$  tels que

$$X^n = S_n(X)\delta_M(X) + R_n(X), \quad \deg R_n \leq 2,$$

le reste nul étant également autorisé. Écrivons  $R_n(X) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$ . L'évaluation en  $M$ , la propriété admise sur les produits et  $\delta_M(M) = 0$  donnent

$$M^n = S_n(M)\delta_M(M) + R_n(M) = \alpha_n M^2 + \beta_n M + \gamma_n I_3.$$

Pour l'unicité matricielle, il faut vérifier que deux restes distincts ne peuvent pas avoir la même valeur en  $M$ . Les premières lignes de  $I_3$ ,  $M$  et  $M^2$  sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première ligne de  $\alpha M^2 + \beta M + \gamma I_3$  est donc  $\begin{pmatrix} \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ . Si cette matrice est nulle, les trois coefficients sont nuls. La famille  $(M^2, M, I_3)$  est libre, ce qui établit l'unicité du triplet pour tout  $a \geq 0$  et tout  $n \geq 0$ .

Calcul lorsque  $a = \frac{5}{4}$ .

Dans ce cas,

$$\delta_M(X) = 4(X-1)^2 \left(X - \frac{1}{4}\right).$$

Comme  $X^n - R_n(X)$  est divisible par ce polynôme, il s'annule en 1 et en  $\frac{1}{4}$ , et sa dérivée s'annule en 1. Ces conditions sont aussi suffisantes : la formule de Taylor polynomiale assure la divisibilité par  $(X-1)^2$ , puis l'annulation en  $\frac{1}{4}$ , distinct de 1, impose le facteur supplémentaire  $X - \frac{1}{4}$ .

On obtient donc

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \quad 2\alpha_n + \beta_n = n, \quad \frac{\alpha_n}{16} + \frac{\beta_n}{4} + \gamma_n = 4^{-n}.$$

La dérivée de  $X^0$  est nulle ; la deuxième condition est donc également correcte pour  $n = 0$ .

Les deux premières équations donnent  $\beta_n = n - 2\alpha_n$  et  $\gamma_n = 1 - n + \alpha_n$ . En les substituant dans la troisième,

$$\frac{9}{16}\alpha_n + 1 - \frac{3n}{4} = 4^{-n}.$$

Il en résulte

$$\alpha_n = \frac{4n}{3} - \frac{16}{9} + \frac{16}{9}4^{-n},$$

$$\beta_n = -\frac{5n}{3} + \frac{32}{9} - \frac{32}{9}4^{-n},$$

$$\gamma_n = \frac{n}{3} - \frac{7}{9} + \frac{16}{9}4^{-n}.$$

Calcul lorsque  $a = 1$ .

La factorisation est maintenant

$$\delta_M(X) = 4(X-1) \left(X - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Les conditions sur le reste sont  $R_n(1) = 1$ ,  $R_n(\frac{1}{2}) = 2^{-n}$  et  $R'_n(\frac{1}{2}) = n2^{1-n}$ . Elles découlent de la divisibilité de  $X^n - R_n$  ; leur suffisance se justifie comme dans le cas précédent. Pour  $n = 0$ , la dernière valeur vaut 0, conformément à la dérivée du polynôme constant.

En posant  $s = 2^{-n}$ , le système est

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \quad \frac{\alpha_n}{4} + \frac{\beta_n}{2} + \gamma_n = s, \quad \alpha_n + \beta_n = 2ns.$$

La première et la troisième équations donnent  $\gamma_n = 1 - 2ns$  et  $\beta_n = 2ns - \alpha_n$ . La deuxième devient

$$1 - ns - \frac{\alpha_n}{4} = s.$$

Ainsi

$$\alpha_n = 4 - 4(n+1)2^{-n},$$

$$\beta_n = -4 + (6n+4)2^{-n},$$

$$\gamma_n = 1 - 2n2^{-n}.$$

Dans les deux cas, les formules donnent  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = (0, 0, 1)$  et  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (0, 1, 0)$ , conformément à  $M^0 = I_3$  et  $M^1 = M$ .

Retour à la question 1.3.

Pour toute suite  $u \in E_a$ , définissons le vecteur colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

La relation (1) et les deux premières lignes de  $M$  donnent  $U_{n+1} = MU_n$ . Une récurrence entraîne  $U_n = M^n U_0$ . La première coordonnée de l'identité sur les puissances fournit donc

$$u_n = \alpha_n u_2 + \beta_n u_1 + \gamma_n u_0.$$

Pour  $a = \frac{5}{4}$ , on a  $u_0 = \frac{1}{4}$ ,  $u_1 = 1$  et  $u_2 = \frac{19}{16}$ . En posant  $s = 4^{-n}$  et en remplaçant les coefficients,

$$u_n = \frac{19}{16} \left( \frac{4n}{3} - \frac{16}{9} + \frac{16s}{9} \right) + \left( -\frac{5n}{3} + \frac{32}{9} - \frac{32s}{9} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{n}{3} - \frac{7}{9} + \frac{16s}{9} \right).$$

Le coefficient de  $n$  vaut  $\frac{19}{12} - \frac{5}{3} + \frac{1}{12} = 0$ , le terme constant vaut

$-\frac{19}{9} + \frac{32}{9} - \frac{7}{36} = \frac{5}{4}$ , et le coefficient de  $s$  vaut  $\frac{19}{9} - \frac{32}{9} + \frac{4}{9} = -1$ . Ainsi

$$u_n = \frac{5}{4} - 4^{-n}.$$

Pour  $a = 1$ , les trois termes initiaux valent 1. L'identité  $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$  donne directement

$$u_n = 1.$$

On retrouve donc les deux résultats de 1.3, avec les limites respectives  $\frac{5}{4}$  et 1.

## Relevé des adaptations

---

1.2(c) : les bases trigonométriques sont justifiées par les formules d'addition et la dimension de l'espace des suites ; aucune résolution faisant intervenir des racines non réelles n'est utilisée. L'énoncé mathématique est conservé.

1.2(f) : remplacement de  $E_a$  par  $E_{a_0}$  dans la première phrase. La substitution de  $u_n = n$  dans la récurrence donne  $5 - 4a = 0$  ; l'affirmation originale n'était donc vraie que pour  $a = a_0 = \frac{5}{4}$ .

2.1 : remplacement de l'étude des valeurs propres dans un cadre non réel par la recherche des valeurs propres réelles ; les matrices sont considérées dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Le calcul est réalisé par le système  $MX = \lambda X$ .

2.2 : la diagonalisation est demandée dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . La classification est adaptée en conséquence ; les dépendances avec les suites et le calcul des puissances restent valables. La mention originale de matrices d'ordre  $n$  est rectifiée en ordre 3.