



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1982

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

1. Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{1}{x^2}.$$

1. a) Étudier les variations de φ . Construire sa courbe représentative.

1. b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution et une seule. Soit α cette solution.

1. c) Montrer que $1 < \alpha < e$.

1. d) Déterminer l'entier naturel k tel que :

$$10^{-3}k \leq \alpha < 10^{-3}(k+1).$$

2. Pour tout réel $\lambda > 0$, soit f_λ la fonction définie sur $] -\lambda, +\infty[$ par :

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda + x} - \lambda \ln(\lambda + x).$$

2. a) Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = 0$ admet une solution et une seule. Soit x_λ cette solution.

2. b) Montrer que $1 < \lambda + x_\lambda$.

2. c) Montrer que $\lambda + x_\lambda$ admet une limite lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, et calculer cette limite.

Partie II

Pour tout réel $\lambda > 0$, soit g_λ la fonction définie sur $] -\lambda, +\infty[$ par :

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda x} \ln(x + \lambda).$$

1. a) Calculer la dérivée g'_λ . À l'aide de la première partie, déterminer son signe.
1. b) Dresser le tableau de variations de g_λ . On pose $y_\lambda = g_\lambda(x_\lambda)$.
1. c) Calculer $g'_\lambda(0)$. À l'aide de la première partie, déterminer le signe de x_λ suivant la position de λ par rapport à α .
1. d) En calculant $g_\lambda\left(-\frac{\lambda}{2}\right)$, trouver une minoration de y_λ .
1. e) Montrer que x_λ et y_λ admettent des limites, finies ou infinies, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Déterminer ces limites.
2. Dans chacun des cas $\lambda = 1$ et $\lambda = 5$, déterminer l'entier $p_\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\frac{p_\lambda}{100} \leq x_\lambda < \frac{p_\lambda + 1}{100},$$

et calculer :

$$g_\lambda\left(\frac{p_\lambda + \frac{1}{2}}{100}\right).$$

3. a) Construire sur un même graphique les courbes représentatives de g_1 et g_5 . Prendre la même unité sur les deux axes et ne dessiner que les points dont les deux coordonnées sont comprises entre -5 et 5 .

3. b) Montrer que ces courbes ont un point commun P et un seul. On pourra considérer la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$h(x) = e^{4x} \ln(x+1) - \ln(x+5),$$

et étudier ses variations.

3. c) Déterminer des valeurs approchées des coordonnées de P à 0,1 près.

Partie III

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x) dx.$$

1. a) Montrer que l'intégrale I_n converge.

1. b) Montrer que :

$$I_n = \frac{\ln n}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx.$$

En déduire que :

$$\frac{\ln n}{n} \leq I_n \leq \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^3}.$$

1. c) Montrer que :

$$I_n \geq \frac{\ln n}{n} + \int_0^{n/10} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx \geq \frac{\ln n}{n} + \frac{10}{11n^3} (1 - e^{-n^2/10}).$$

2. En déduire une valeur approchée de I_5 à 0,001 près.