



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1982

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. a) La fonction φ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée vaut :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 + 2}{x^3} > 0.$$

Elle est donc strictement croissante sur tout son domaine. À gauche, $\ln x \rightarrow -\infty$ et $-\frac{1}{x^2} \rightarrow -\infty$, d'où $\varphi(x) \rightarrow -\infty$. À droite, $\ln x \rightarrow +\infty$ et $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, donc $\varphi(x) \rightarrow +\infty$.

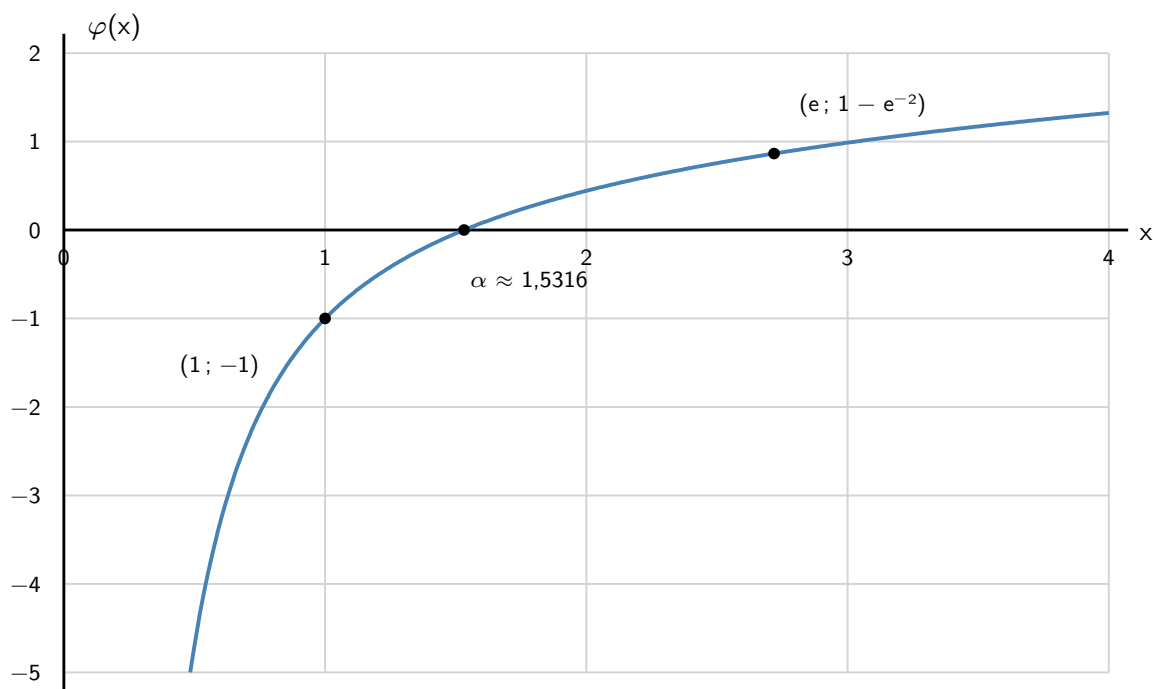
x	0^+	Sur $]0, +\infty[$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	
$\varphi(x)$	$-\infty$	Strictement croissante	$+\infty$

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale. En outre :

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4} < 0.$$

La courbe est donc strictement concave sur son domaine. Elle passe par $(1, -1)$ et $(e, 1 - e^{-2})$. Enfin, $\varphi(x) - \ln x = -\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ à l'infini, ce qui précise sa position sous la courbe du logarithme.

Le tracé suivant est calculé à partir de la formule de φ ; la portion sous le bord inférieur de la fenêtre n'est pas représentée.



Fenêtre : $0 < x \leq 4$; $-5 \leq y \leq 2$.

1. b) La fonction φ est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et ses limites aux deux extrémités sont $-\infty$ et $+\infty$. Le théorème de la bijection assure donc que φ prend la valeur 0 en un unique point $\alpha > 0$.

Cette solution est caractérisée par $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha^2}$.

1. c) Les valeurs aux deux abscisses proposées sont :

$$\varphi(1) = -1 < 0, \quad \varphi(e) = 1 - e^{-2} > 0.$$

La dernière inégalité résulte de $e > 1$. Par continuité et stricte croissance, la racine unique est située entre ces deux points : $1 < \alpha < e$.

1. d) On recherche deux décimaux consécutifs espacés de 10^{-3} entre lesquels φ change de signe. Les évaluations donnent :

$$\varphi(1,531) \simeq -0,0007071421 < 0,$$

$$\varphi(1,532) \simeq 0,0005025867 > 0.$$

Ces signes peuvent être certifiés par Taylor-Lagrange appliqué à $\ln x$ en 1 à l'ordre 20.

Pour $1 \leq x \leq 1,532$, les dérivées du logarithme donnent :

$$\ln x = \sum_{j=1}^{20} \frac{(-1)^{j-1}(x-1)^j}{j} + R_{20}(x), \quad |R_{20}(x)| \leq \frac{(x-1)^{21}}{21} < 9 \times 10^{-8}.$$

En substituant les deux décimaux et en tenant compte de ce reste, on obtient par exemple $-0,000708 < \varphi(1,531) < -0,000706$ et $0,000502 < \varphi(1,532) < 0,000504$.

La stricte croissance entraîne $1,531 < \alpha < 1,532$. Par conséquent, l'entier demandé est $k = 1531$. Une valeur numérique plus précise est $\alpha \simeq 1,5315843937$.

2. a) Question adaptée au programme actuel : le paramètre, non restreint explicitement dans le PDF, est pris strictement positif. Cette hypothèse est nécessaire à l'assertion d'existence.

Fixons $\lambda > 0$. La fonction f_λ est continue et dérivable sur $] -\lambda, +\infty[$, et :

$$f'_\lambda(x) = -\frac{1}{(\lambda+x)^2} - \frac{\lambda}{\lambda+x} < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante. Lorsque $x \rightarrow -\lambda^+$, le nombre $\lambda+x$ tend vers 0^+ ; les deux termes $\frac{1}{\lambda+x}$ et $-\lambda \ln(\lambda+x)$ tendent vers $+\infty$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, le premier terme tend vers 0 et le second vers $-\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -\lambda^+} f_\lambda(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = -\infty.$$

Le théorème de la bijection fournit une unique solution $x_\lambda \in]-\lambda, +\infty[$ de $f_\lambda(x) = 0$.

2. b) Méthode 1 — Comparaison à un point connu.

Au point $x = 1 - \lambda$, appartenant au domaine, on a $f_\lambda(1 - \lambda) = 1 > 0$. Comme f_λ est strictement décroissante et s'annule en x_λ , il faut $x_\lambda > 1 - \lambda$.

Ainsi $\lambda + x_\lambda > 1$.

Méthode 2 — Signe dans l'équation de la racine.

L'équation de la racine donne :

$$\lambda \ln(\lambda + x_\lambda) = \frac{1}{\lambda + x_\lambda} > 0.$$

Puisque $\lambda > 0$, le logarithme est positif, donc son argument est supérieur à 1.

2. c) Posons $t_\lambda = \lambda + x_\lambda > 1$. L'équation précédente s'écrit :

$$\ln t_\lambda = \frac{1}{\lambda t_\lambda}, \quad t_\lambda \ln t_\lambda = \frac{1}{\lambda}.$$

Méthode 1 — Encadrement direct.

Comme $t_\lambda > 1$, on a $0 < \ln t_\lambda < \frac{1}{\lambda}$. L'exponentielle étant strictement croissante :

$$1 < t_\lambda < e^{1/\lambda}.$$

Les bornes tendent toutes deux vers 1 lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Le théorème d'encadrement donne donc $t_\lambda \rightarrow 1$.

Méthode 2 — Fonction réciproque réelle.

Considérons $F(t) = t \ln t$ sur $[1, +\infty[$. Cette fonction est continue, $F(1) = 0$, tend vers $+\infty$ et vérifie $F'(t) = 1 + \ln t > 0$. Elle définit donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ dont la réciproque est continue, y compris à droite en 0.

L'équation de la racine donne $t_\lambda = F^{-1}(1/\lambda)$. La continuité de la réciproque implique :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} t_\lambda = F^{-1}(0) = 1.$$

Les deux méthodes concluent $\lambda + x_\lambda \rightarrow 1$. La première fournit un encadrement explicite ; la seconde identifie la dépendance de la solution au paramètre.

Partie II

Rectification de la définition : le PDF écrit $e^{-\lambda x} - \ln(x + \lambda)$. Avec cette différence, la dérivée serait $-\lambda e^{-\lambda x} - \frac{1}{x + \lambda} < 0$ partout, ce qui ne correspond ni aux questions sur x_λ ni à la fonction auxiliaire h donnée en II.3.b. La définition cohérente, retenue dans le sujet adapté, est :

$$g_\lambda(x) = e^{-\lambda x} \ln(x + \lambda), \quad \lambda > 0.$$

1. a) Question adaptée au programme actuel : on utilise la définition rectifiée ci-dessus.

La fonction g_λ est dérivable sur $] -\lambda, +\infty[$. La dérivation d'un produit donne :

$$g'_\lambda(x) = e^{-\lambda x} \left(\frac{1}{x + \lambda} - \lambda \ln(x + \lambda) \right) = e^{-\lambda x} f_\lambda(x).$$

Le facteur exponentiel est strictement positif. D'après I.2.a, f_λ est strictement décroissante et a pour unique zéro x_λ . Par conséquent :

$$g'_\lambda(x) > 0 \text{ pour } -\lambda < x < x_\lambda, \quad g'_\lambda(x_\lambda) = 0, \quad g'_\lambda(x) < 0 \text{ pour } x > x_\lambda.$$

1. b) La fonction est donc strictement croissante jusqu'à x_λ , puis strictement décroissante. Il reste à déterminer les limites aux extrémités de son domaine.

Quand $x \rightarrow -\lambda^+$, $e^{-\lambda x} \rightarrow e^{\lambda^2} > 0$ et $\ln(x + \lambda) \rightarrow -\infty$, donc $g_\lambda(x) \rightarrow -\infty$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, le logarithme croît plus lentement que l'exponentielle. Pour le justifier, lorsque x est assez grand, $0 \leq \ln(x + \lambda) \leq x + \lambda$, et $e^{-\lambda x}(x + \lambda) \rightarrow 0$ par croissance comparée. Il vient $g_\lambda(x) \rightarrow 0$. La fonction est positive pour $x > 1 - \lambda$, donc cette limite est atteinte par valeurs positives.

x	$-\lambda^+$	x_λ	$+\infty$
Signe de g'_λ	+ avant x_λ	0	– après x_λ
Variation de g_λ	Depuis $-\infty$, croissante	Maximum y_λ	Décroissante vers 0

Ainsi y_λ est le maximum global, strict, de g_λ . Il est positif, car $\lambda + x_\lambda > 1$. En utilisant l'équation de I.2 :

$$y_\lambda = e^{-\lambda x_\lambda} \ln(\lambda + x_\lambda) = \frac{e^{-\lambda x_\lambda}}{\lambda(\lambda + x_\lambda)} > 0.$$

La courbe coupe l'axe des abscisses au point $x = 1 - \lambda$ et admet l'asymptote horizontale

$y = 0$ en $+\infty$.

1. c) Comme $\lambda > 0$, le point 0 appartient au domaine et :

$$g'_\lambda(0) = \frac{1}{\lambda} - \lambda \ln \lambda = -\lambda \varphi(\lambda).$$

D'après I.1, φ est négative avant α , nulle en α et positive après. D'après II.1.a, la dérivée g'_λ est positive exactement à gauche de x_λ .

On en déduit :

$$\begin{cases} x_\lambda > 0, & 0 < \lambda < \alpha, \\ x_\lambda = 0, & \lambda = \alpha, \\ x_\lambda < 0, & \lambda > \alpha. \end{cases}$$

Dans le cas d'égalité, $g'_\lambda(0) = 0$ et l'unicité du zéro de la dérivée donne $x_\lambda = 0$.

1. d) Le point $-\frac{\lambda}{2}$ appartient au domaine, car $\lambda > 0$ et $-\lambda < -\frac{\lambda}{2}$. On calcule :

$$g_\lambda\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = e^{\lambda^2/2} \ln\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Puisque y_λ est le maximum de g_λ sur tout son domaine :

$$y_\lambda \geq e^{\lambda^2/2} \ln\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Cette minoration reste vraie lorsque $0 < \lambda \leq 2$, même si son membre de droite est alors non positif.

1. e) D'après I.2.c, $t_\lambda = \lambda + x_\lambda \rightarrow 1$. Ainsi :

$$x_\lambda = t_\lambda - \lambda \rightarrow -\infty.$$

Par exemple, t_λ est borné à partir d'un certain rang du paramètre, tandis que $\lambda \rightarrow +\infty$.

Pour y_λ , utilisons la minoration imposée dans la question précédente. Si $\lambda \geq 2e$, on a $\ln(\lambda/2) \geq 1$, donc :

$$y_\lambda \geq e^{\lambda^2/2} \rightarrow +\infty.$$

Par comparaison, $y_\lambda \rightarrow +\infty$. Les deux limites demandées sont donc $-\infty$ pour x_λ et $+\infty$ pour y_λ .

2. La fonction f_λ est strictement décroissante. Pour situer sa racine entre deux centièmes consécutifs, il suffit donc de vérifier un signe positif au bord gauche et un signe négatif au bord droit.

λ	Bord gauche u	$f_\lambda(u)$, valeur approchée	Bord droit v	$f_\lambda(v)$, valeur approchée
1	0,76	0,00286801	0,77	-0,00600780
5	-3,82	0,01988543	-3,81	-0,02943040

Ces signes sont garantis, par exemple, par la formule de Taylor-Lagrange du logarithme utilisée en I.1.d : les arguments 1,76, 1,77, 1,18 et 1,19 sont supérieurs à 1 ; à l'ordre 40, l'erreur est majorée par $\frac{(t-1)^{41}}{41}$. Même multipliée par λ , cette erreur reste inférieure à 10^{-5} pour ces quatre évaluations, ce qui ne peut modifier les signes affichés.

On a ainsi :

$$0,76 < x_1 < 0,77, \quad -3,82 < x_5 < -3,81.$$

Il en résulte $p_1 = 76$ et $p_5 = -382$. Attention, l'entier demandé pour une abscisse négative est l'entier inférieur ; l'encadrement est bien $-3,82 \leq x_5 < -3,81$.

Les milieux des deux intervalles sont 0,765 et $-3,815$. En substituant dans les expressions exactes :

$$g_1(0,765) = e^{-0,765} \ln(1,765) \simeq 0,2643797941,$$

$$g_5(-3,815) = e^{19,075} \ln(1,185) \simeq 32655665,5225.$$

Ces résultats sont des valeurs approchées des expressions demandées. Pour situer les maxima sur le graphique, on peut aussi retenir $x_1 \simeq 0,7632228$, $y_1 \simeq 0,2643804$, $x_5 \simeq -3,8159794$ et $y_5 \simeq 32656121,5418$.

3. a) Les caractéristiques nécessaires au tracé sont les suivantes.

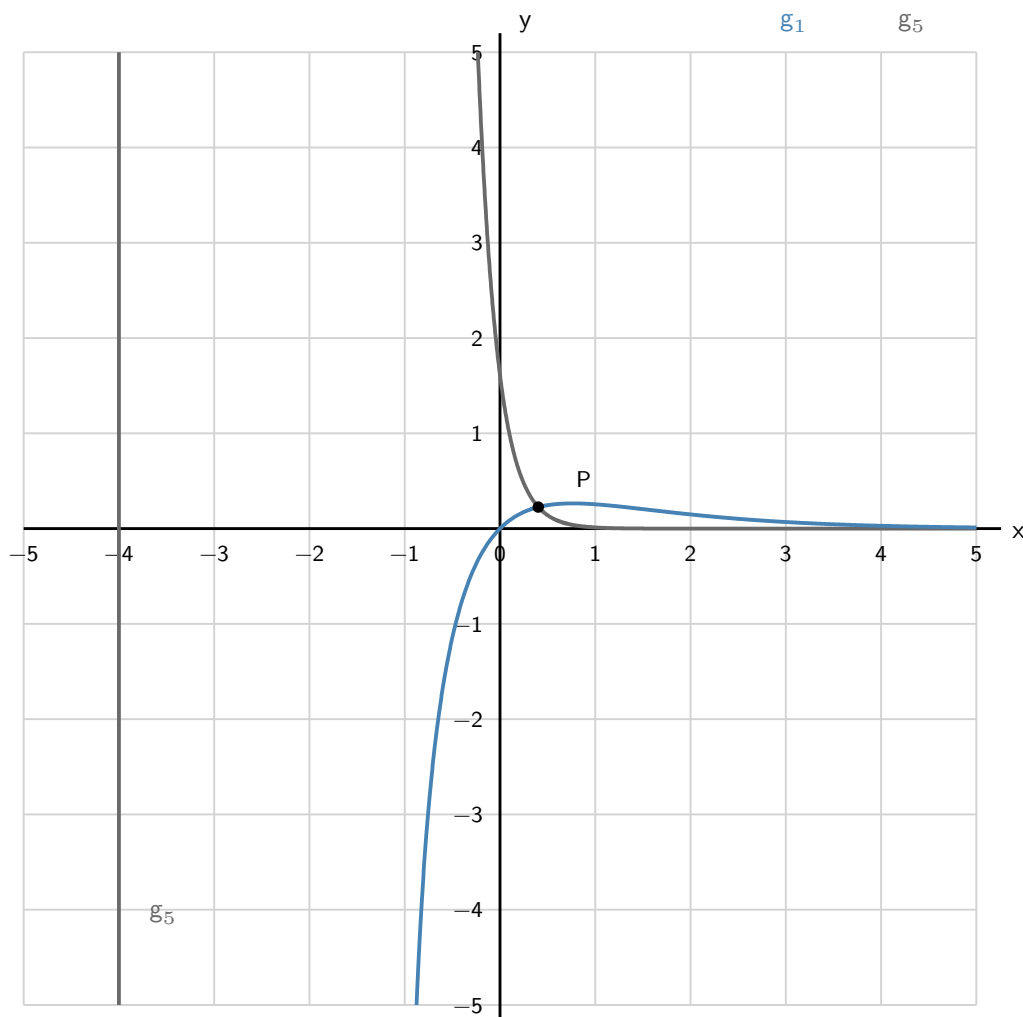
Pour g_1 , le domaine est $] -1, +\infty[$, l'asymptote verticale est $x = -1$, le zéro est 0 et le maximum est atteint près de 0,7632, à une hauteur proche de 0,2644. La courbe décroît ensuite vers l'axe des abscisses.

Pour g_5 , le domaine est $] -5, +\infty[$, l'asymptote verticale est $x = -5$, le zéro est -4 et le maximum, près de $-3,8160$, dépasse largement la hauteur 5. La branche décroissante revient dans la fenêtre au point d'abscisse proche de $-0,2327$, où la valeur vaut 5, puis tend vers 0. On a notamment $g_5(0) = \ln 5 \simeq 1,6094$.

Il faut aussi représenter la portion de la branche croissante de g_5 qui traverse la fenêtre autour de $x = -4$. Elle est presque verticale à l'échelle demandée :

$$g'_5(-4) = e^{20} \simeq 4,85 \times 10^8.$$

Le graphique suivant utilise la même unité sur les deux axes et conserve toutes les portions situées dans le carré $[-5, 5]^2$. La partie de g_5 située au-dessus de 5 est interrompue.



Une unité vaut 50 unités graphiques sur chacun des axes.

La portion de g_5 près de $x = -4$ est presque verticale.

3. b) Le domaine commun aux deux courbes est $] -1, +\infty[$. Pour $-1 < x \leq 0$, on a $\ln(x+1) \leq 0$ et $\ln(x+5) > 0$, donc :

$$g_1(x) \leq 0 < g_5(x).$$

Aucun point commun ne possède donc une abscisse négative ou nulle.

Pour $x \geq 0$, l'égalité $g_1(x) = g_5(x)$ est équivalente, après multiplication par $e^{5x} > 0$, à :

$$e^{4x} \ln(x+1) - \ln(x+5) = 0,$$

soit $h(x) = 0$. La fonction h est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$, et :

$$h'(x) = e^{4x} \left(4 \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right) - \frac{1}{x+5}.$$

Pour $x \geq 0$, $\ln(x+1) \geq 0$ et $e^{4x} \geq 1$. Ainsi :

$$h'(x) \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} > 0.$$

La fonction h est strictement croissante. De plus, $h(0) = -\ln 5 < 0$. Pour $x \geq 1$, on a $\ln(x+1) \geq \ln 2$ et $\ln(x+5) \leq x+5$, d'où :

$$h(x) \geq e^{4x} \ln 2 - (x+5) \rightarrow +\infty.$$

La continuité, la stricte croissance et ces valeurs aux extrémités assurent l'existence d'une unique racine $\xi > 0$. Les courbes ont donc un unique point commun :

$$P = (\xi, g_1(\xi)).$$

3. c) Les évaluations numériques donnent $h(0,40) \simeq -0,0198411$ et $h(0,41) \simeq 0,0830141$.
Comme h est strictement croissante :

$$0,40 < \xi < 0,41.$$

Ces signes peuvent être certifiés avec Taylor-Lagrange : à l'ordre 20, l'erreur sur e^{4x} pour ces deux abscisses est inférieure à 10^{-12} . Pour les logarithmes, on utilise $\ln(5+x) = 2\ln 2 + \ln((5+x)/4)$ et les développements en 1 à l'ordre 40 ; le reste sur $\ln 2$ est au plus $1/41$, et peut être rendu beaucoup plus petit en écrivant $\ln 2 = \ln(4/3) + \ln(3/2)$. Tous les arguments ainsi employés sont compris entre 1 et $3/2$, hormis $1+x \leq 1,41$: chaque erreur est alors au plus $\frac{(1/2)^{41}}{41}$. L'erreur totale sur chaque valeur de h est inférieure à 10^{-10} , bien en dessous de leur distance à zéro.

D'après II.2, $x_1 > 0,76$. La fonction g_1 est donc croissante sur $[0,40, 0,41]$, d'où :

$$g_1(0,40) < g_1(\xi) < g_1(0,41).$$

Les évaluations donnent $g_1(0,40) \simeq 0,2255441$ et $g_1(0,41) \simeq 0,2280234$, donc $0,2255 < g_1(\xi) < 0,2281$.

On peut ainsi choisir les coordonnées approchées $(0,4, 0,2)$: l'erreur sur l'abscisse est inférieure à 0,01 et celle sur l'ordonnée à 0,029, donc chacune est inférieure à 0,1. Un calcul plus précis donne $P \simeq (0,4019702, 0,2260410)$.

Partie III

1. a) Fixons un entier $n \geq 1$. La fonction $x \mapsto e^{-nx} \ln(n+x)$ est continue sur $[0, +\infty[$, car $n+x \geq 1$. Elle est non négative ; il n'existe aucune difficulté au bord 0, y compris lorsque $n = 1$.

Pour $x \geq 0$, on a $0 \leq \ln(n+x) \leq n+x$. Les croissances comparées donnent $(n+x)e^{-nx/2} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Il existe donc un réel $A \geq 0$ tel que $n+x \leq e^{nx/2}$ pour $x \geq A$. Sur cette demi-droite :

$$0 \leq e^{-nx} \ln(n+x) \leq e^{-nx/2}.$$

Comme $n > 0$, l'intégrale de $e^{-nx/2}$ sur $[A, +\infty[$ converge. Le théorème de comparaison

pour les intégrales à termes positifs prouve la convergence de I_n . Elle est également absolue puisque l'intégrande est non négatif.

1. b) Effectuons l'intégration par parties sur le segment $[0, A]$, avec $A > 0$, en choisissant $u(x) = \ln(n+x)$ et $v'(x) = e^{-nx}$. Ces fonctions sont de classe C^1 et l'on peut prendre $v(x) = -\frac{1}{n}e^{-nx}$. Il vient :

$$\int_0^A e^{-nx} \ln(n+x) dx = \frac{\ln n}{n} - \frac{e^{-nA} \ln(n+A)}{n} + \int_0^A \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx.$$

Le terme de bord tend vers zéro par croissance comparée. De plus, pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} \leq \frac{e^{-nx}}{n^2}.$$

Le majorant est intégrable sur $[0, +\infty[$. La nouvelle intégrale converge donc et l'on peut passer à la limite dans l'égalité obtenue sur le segment :

$$I_n = \frac{\ln n}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx.$$

La positivité et l'intégration du majorant donnent :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx \leq \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n^3}.$$

Ainsi $\frac{\ln n}{n} \leq I_n \leq \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^3}$, pour tout entier $n \geq 1$.

1. c) L'intégrande de la nouvelle intégrale est non négatif. En ne conservant que le segment $[0, n/10]$, on obtient :

$$I_n \geq \frac{\ln n}{n} + \int_0^{n/10} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx.$$

Pour $0 \leq x \leq n/10$, on a $n+x \leq \frac{11n}{10}$. Les quantités étant strictement positives, l'inversion donne :

$$\frac{1}{n(n+x)} \geq \frac{10}{11n^2}.$$

Par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{n/10} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} dx \geq \frac{10}{11n^2} \int_0^{n/10} e^{-nx} dx = \frac{10}{11n^3} (1 - e^{-n^2/10}).$$

C'est l'ensemble des inégalités demandées, valable également pour $n = 1$.

2. Question adaptée au programme actuel. Rectification locale : le PDF mentionne I'_5 , qui n'a pas été défini, puis répète « de I_5 ». Le sujet adapté conserve la demande explicite d'une valeur approchée de I_5 ; aucune quantité supplémentaire n'est introduite.

Les deux questions précédentes donnent l'encadrement exact :

$$L = \frac{\ln 5}{5} + \frac{10}{1375} (1 - e^{-5/2}) \leq I_5 \leq U = \frac{\ln 5}{5} + \frac{1}{125}.$$

Numériquement, $L \simeq 0,32856332795$ et $U \simeq 0,32988758249$. En arrondissant les bornes vers l'extérieur :

$$0,328563 < I_5 < 0,329888.$$

Le milieu de l'encadrement exact est proche de 0,3292254552 ; sa distance à I_5 est au plus $(U - L)/2 \simeq 0,00066213$.

On peut donc retenir $I_5 \simeq 0,3292$. En effet, l'encadrement extérieur garantit directement :

$$|I_5 - 0,3292| < \max(0,3292 - 0,328563, 0,329888 - 0,3292) = 0,000688 < 0,001.$$

La précision demandée est ainsi démontrée à partir des majorations et minoration du sujet.

Relevé des adaptations

- I.2, préambule : ajout de l'hypothèse $\lambda > 0$, absente du PDF et nécessaire à l'existence unique annoncée ; la même hypothèse est rappelée au début de la partie II.
- II, définition de g_λ : remplacement de la différence imprimée par le produit $e^{-\lambda x} \ln(x + \lambda)$. Cette rectification est imposée conjointement par $g'_\lambda = e^{-\lambda x} f_\lambda$, l'étude du maximum en x_λ et la fonction h fournie en II.3.b.
- III.2 : suppression de la mention non définie I'_5 et de la répétition qui la suit ; conservation de la demande portant explicitement sur I_5 avec la précision 0,001.