



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1981

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

À tout réel a , on associe f_a , fonction réelle d'une variable réelle définie par

$$f_a(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-a}}.$$

Soit C_a la courbe représentative de f_a .

1. Indiquer pour quelles valeurs de x la fonction f_a est définie.
2. Dresser, en fonction de a , les différents tableaux de variation de f_a .
3. Étudier les limites de f_a aux bornes de son domaine et déterminer les éventuelles asymptotes verticales ou affines de C_a .
4. Rechercher les éventuels points d'inflexion de C_a .
5. Trouver la courbe Γ décrite par le point à tangente horizontale de C_a lorsque a varie.
6. Construire sur un même graphique, avec des échelles appropriées, non nécessairement les mêmes sur les axes Ox et Oy , les courbes Γ , C_{-1} , C_0 et C_1 .

Partie II

On considère la fonction g_a , fonction réelle d'une variable réelle définie par

$$g_a(x) = \frac{x^2}{\sqrt{|x-a|}}.$$

Soit D_a la courbe représentative de g_a .

1. Reprendre, pour la famille des courbes D_a , les questions 1, 2, 3 et 4 de la première partie. Construire sur un même graphique les courbes D_{-1} , D_0 et D_1 .
2. Déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe D_1 et de la droite d'équation $y = \lambda$.

Donner une valeur approchée, à 10^{-1} près par défaut, des abscisses des points de D_1 d'ordonnées $\lambda = 1$ et $\lambda = 4$ respectivement.

Partie III

1. Démontrer que, pour tout $x > a$, l'intégrale $\int_a^x f_a(t) dt$ converge. Démontrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f_a(t) dt$ diverge.
2. Déterminer deux réels α et β tels que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}(\alpha x + \beta) \right) = 0.$$

Quelle est la nature de l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}(\alpha x + \beta) \right) dx,$$

où A est un réel strictement supérieur à a et à 0?

3. Déterminer un réel γ tel que l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x} \left(\alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} \right) \right) dx$$

soit convergente.

4. Calculer

$$I_n = \int_a^n \frac{x^2}{\sqrt{x-a}} dx,$$

pour n entier strictement supérieur au paramètre a .

5. Soit

$$S_n = \sum_{k=N+1}^n \frac{k^2}{\sqrt{k-a}},$$

où N est un entier strictement plus grand que $\left\lceil \frac{4a}{3} \right\rceil$, et $n > N$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Établir la double inégalité

$$I_{n+1} - I_{N+1} \geq S_n \geq I_n - I_N.$$

En déduire un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

6. On pose

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad u_k = \frac{1}{\sqrt{k}} - 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

Montrer que la série de terme général u_k est convergente. Calculer

$$\sum_{k=1}^n u_k$$

et en déduire que T_n est équivalent à $2\sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

7. On pose

$$V_n = \sum_{k=1}^n k\sqrt{k}, \quad W_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}.$$

En utilisant la définition des intégrales $\int_0^1 x\sqrt{x} \, dx$ et $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$ par les sommes de Riemann, trouver

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n^{5/2}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{n^{3/2}}.$$

8. Retrouver, à l'aide des questions 3, 6 et 7 de la troisième partie, un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.