



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1981

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les trois parties sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. On se donne $\alpha > 0$ et une application continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

Partie I

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F . On suppose que F est continue, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$, on suppose que $P(X \geq t) > 0$ et que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} P(X \leq t + h \mid X \geq t) = f(t)(P(X \leq t))^\alpha.$$

On note $P(A \mid B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B .

1. Montrer que F vérifie la relation

$$\forall t > 0, \quad F'(t) = f(t)F(t)^\alpha(1 - F(t)). \quad (1)$$

2. Montrer que F est dérivable à droite en 0 et donner $F'_d(0)$.

Partie II

On désigne maintenant par F une application de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1[$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant (1) et la condition $x = 0 \iff F(x) = 0$. Au bord 0, la dérivabilité s'entend à droite.

1. Montrer que F est strictement croissante et admet une limite finie $L \in]0, 1]$ à l'infini.

2. Soit $x > 0$.

(a) Montrer que l'application H , définie sur $]0, x]$ par

$$H(y) = \int_{F(y)}^{F(x)} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)} - \int_y^x f(t) dt,$$

est dérivable sur $]0, x]$ et calculer $H'(y)$.

(b) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{F(x)} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)}$ converge et vaut $\int_0^x f(t) dt$. En déduire que $\alpha < 1$.

(c) Que dire de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$?

3. (a) Montrer que, si α est rationnel, un changement de variable ramène le calcul de

$$\int_0^{F(x)} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)}$$

à l'intégration d'une fraction rationnelle.

On écrira $\alpha = r/s$ avec r, s entiers positifs et $r < s$, et l'on utilisera $t = u^s$.

(b) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, montrer, en posant $I(x) = \int_0^x f(t) dt$, que

$$F(x) = \left(\frac{e^{I(x)} - 1}{e^{I(x)} + 1} \right)^2.$$

Examiner le cas où $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

4. Soit $G : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^\alpha(1-t)}$, avec $G(0) = 0$.

(a) Pour un entier $n \geq 0$, calculer $G(x) - \int_0^x \frac{dt}{t^\alpha}$ et utiliser l'identité

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \dots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

pour donner, en 0 à droite et à l'ordre n , un développement limité de $x^{\alpha-2}G(x) - \frac{1}{x(1-\alpha)}$.

(b) En déduire, si $f(0) \neq 0$, un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de 0 à droite.

5. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \leq G(x) < \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{1-\alpha}.$$

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$1 - \exp \left(\frac{1}{1-\alpha} - \int_0^x f(t) dt \right) < F(x) \leq 1 - \exp \left(- \int_0^x f(t) dt \right).$$

6. Montrer que, si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge, F est la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire réelle.

Partie III

Soit $x_0 \in]0, 1[$ fixé. On étudie la fonction g de la variable réelle z définie, lorsque l'intégrale converge, par

$$g(z) = \int_0^{x_0} \frac{t^z}{1-t} dt.$$

1. Montrer que le domaine de définition de g est $] -1, +\infty[$. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et, plus généralement, $g(n)$ pour tout entier naturel n .

2. (a) Montrer que g est décroissante sur $] -1, +\infty[$.

(b) Montrer que, pour $z > -1$,

$$\frac{x_0^{z+1}}{z+1} \leq g(z) \leq \frac{x_0^{z+1}}{(z+1)(1-x_0)}.$$

En déduire le comportement de g quand z tend vers -1 par valeurs supérieures, puis vers $+\infty$.

(c) En déduire que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_0^k}{k}$$

converge et donner sa somme.

3. Montrer que les intégrales $\int_0^{x_0} \frac{t^z \ln t}{1-t} dt$ et $\int_0^{x_0} \frac{t^z (\ln t)^2}{1-t} dt$ existent si $z > -1$. On ne cherchera pas à les calculer.

4. Soient $a > -1$ et $z \in]a, +\infty[$ fixés. Soit $h \neq 0$ tel que $z + h > a$.

(a) Montrer qu'à chaque h on peut associer une application $\theta_h :]0, x_0] \rightarrow]0, 1[$ telle que

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} - \int_0^{x_0} \frac{t^z \ln t}{1-t} dt = \frac{h}{2} \int_0^{x_0} \frac{(\ln t)^2 t^{z+\theta_h(t)h}}{1-t} dt.$$

On pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'égalité $t^h - 1 - h \ln t = \frac{h^2}{2} (\ln t)^2 t^{h\theta}$ pour un $\theta \in]0, 1[$ dépendant de t et de h .

(b) En déduire que g est dérivable en z et donner $g'(z)$.

(c) Où g est-elle dérivable?

5. Tracer l'allure du graphe de g en repère orthonormé.