



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1981

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

Le paramètre a est réel et fixé dans chaque étude. Les limites au bord d'un domaine sont toujours prises depuis ce domaine.

1.

La racine carrée doit être réelle et le dénominateur non nul. Il faut donc $x - a > 0$, ce qui est aussi suffisant. Ainsi

$$\mathcal{D}(f_a) =]a, +\infty[.$$

En particulier, $x = a$ est exclu, même lorsque $a = 0$ et que le numérateur s'annule aussi.

2.

La fonction f_a est de classe C^∞ sur $]a, +\infty[$. En dérivant le produit $x^2(x - a)^{-1/2}$, on trouve

$$f'_a(x) = \frac{2x}{\sqrt{x - a}} - \frac{x^2}{2(x - a)^{3/2}} = \frac{x(3x - 4a)}{2(x - a)^{3/2}}.$$

Le dénominateur est strictement positif sur le domaine. Les seuls zéros possibles sont $x = 0$ et $x = 4a/3$; il faut vérifier lesquels appartiennent au domaine.

Cas $a < 0$

On a $4a/3 < a$, donc ce zéro est hors du domaine, tandis que $0 > a$. Pour $x > a$, $3x - 4a > -a > 0$, et le signe de la dérivée est celui de x .

De plus, $f_a(0) = 0$, $f_a(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow a^+$, et $f_a(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Ainsi :

Position de x	Signe de $f'_a(x)$	Variation ou valeur de f_a
$]a, 0[$	—	$+\infty \searrow 0$

Position de x	Signe de $f'_a(x)$	Variation ou valeur de f_a
0	0	Minimum 0
$]0, +\infty[$	+	$0 \nearrow +\infty$

Cas $a = 0$

Le domaine est $]0, +\infty[$ et $f_0(x) = x^{3/2}$. Sa dérivée est $3\sqrt{x}/2 > 0$. La limite en 0^+ vaut 0, mais cette valeur n'est pas atteinte.

Position de x	Signe de $f'_0(x)$	Variation de f_0
$]0, +\infty[$	+	$0 \nearrow +\infty$

La fonction n'admet pas de minimum sur son domaine ; sa borne inférieure est 0.

Cas $a > 0$

Le zéro 0 est hors du domaine, tandis que $x_a = 4a/3 > a$. Comme $x > 0$ sur le domaine, le signe de f'_a est celui de $3x - 4a$.

Posons

$$m_a = f_a(x_a) = \frac{(4a/3)^2}{\sqrt{a/3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}}a^{3/2}.$$

Les limites en a^+ et en $+\infty$ valent $+\infty$. Le tableau est :

Position de x	Signe de $f'_a(x)$	Variation ou valeur de f_a
$]a, x_a[$	—	$+\infty \searrow m_a$
x_a	0	Minimum m_a
$]x_a, +\infty[$	+	$m_a \nearrow +\infty$

3.

Question adaptée au programme actuel — La demande d'étude des branches infinies est limitée aux limites et aux asymptotes verticales ou affines, conformément au référentiel fourni.

Au bord inférieur, si $a \neq 0$, on a $x^2 \rightarrow a^2 > 0$ et $\sqrt{x-a} \rightarrow 0^+$, donc

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f_a(x) = +\infty.$$

La droite $x = a$ est alors une asymptote verticale. Si $a = 0$, $f_0(x) = x^{3/2} \rightarrow 0$ en 0^+ : il n'y a pas d'asymptote verticale. L'origine est seulement le point du prolongement continu, et n'appartient pas à C_0 .

À l'infini, pour x suffisamment grand, $x > 0$ et

$$f_a(x) = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{1-a/x}} \sim x^{3/2}.$$

Ainsi $f_a(x) \rightarrow +\infty$ et

$$\frac{f_a(x)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-a/x}} \rightarrow +\infty.$$

Il n'existe pas d'asymptote affine $y = bx + c$: si $f_a(x) - (bx + c) \rightarrow 0$, la division par x donnerait $f_a(x)/x \rightarrow b$, ce qui contredit la limite précédente. Cela exclut aussi une asymptote horizontale.

4.

La fonction étant de classe C^2 sur son domaine, on étudie le signe de sa dérivée seconde. En dérivant la formule de 2,

$$f_a''(x) = \frac{3x^2 - 8ax + 8a^2}{4(x-a)^{5/2}}.$$

Pour le numérateur, une mise sous forme de somme de carrés donne

$$3x^2 - 8ax + 8a^2 = 3\left(x - \frac{4a}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}a^2.$$

Si $a \neq 0$, cette expression est strictement positive pour tout x . Si $a = 0$, elle vaut $3x^2 > 0$ sur le domaine $x > 0$. Le dénominateur est également strictement positif.

On a donc $f_a''(x) > 0$ sur tout $]a, +\infty[$. La courbe est strictement convexe et ne présente aucun changement de convexité :

C_a n'a aucun point d'inflexion.

Il ne suffit pas de rechercher des zéros formels de la dérivée seconde ; il faut rester dans le domaine et contrôler un changement de convexité.

5.

Une tangente horizontale en un point de C_a équivaut à $f_a'(x) = 0$ avec $x > a$. L'étude de 2 a déjà déterminé tous ces points.

Pour $a < 0$, l'unique point est $O = (0, 0)$. Pour $a = 0$, il n'y en a aucun, puisque 0 est exclu et $f_0'(x) > 0$. Pour $a > 0$, l'unique point est

$$P_a = \left(\frac{4a}{3}, \frac{16}{3\sqrt{3}}a^{3/2}\right).$$

Pour éliminer le paramètre dans ce dernier cas, posons $x = 4a/3 > 0$, donc $a = 3x/4$. On obtient

$$y = \frac{16}{3\sqrt{3}} \left(\frac{3x}{4} \right)^{3/2} = 2x^{3/2}.$$

Réciproquement, pour chaque $x > 0$, le choix $a = 3x/4 > 0$ donne précisément ce point à tangente horizontale. L'origine est obtenue pour tous les paramètres négatifs. Ainsi l'ensemble demandé est

$$\Gamma = \{(x, 2x\sqrt{x}) : x \geq 0\}.$$

Le point O appartient à ce lieu, bien qu'il ne corresponde pas au paramètre $a = 0$. Il n'y a aucun point du lieu d'abscisse négative.

6.

Les fonctions à tracer et leurs domaines sont

$$f_{-1}(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \quad (x > -1), \quad f_0(x) = x^{3/2} \quad (x > 0), \quad f_1(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \quad (x > 1).$$

On ajoute Γ , d'équation $y = 2x^{3/2}$ pour $x \geq 0$.

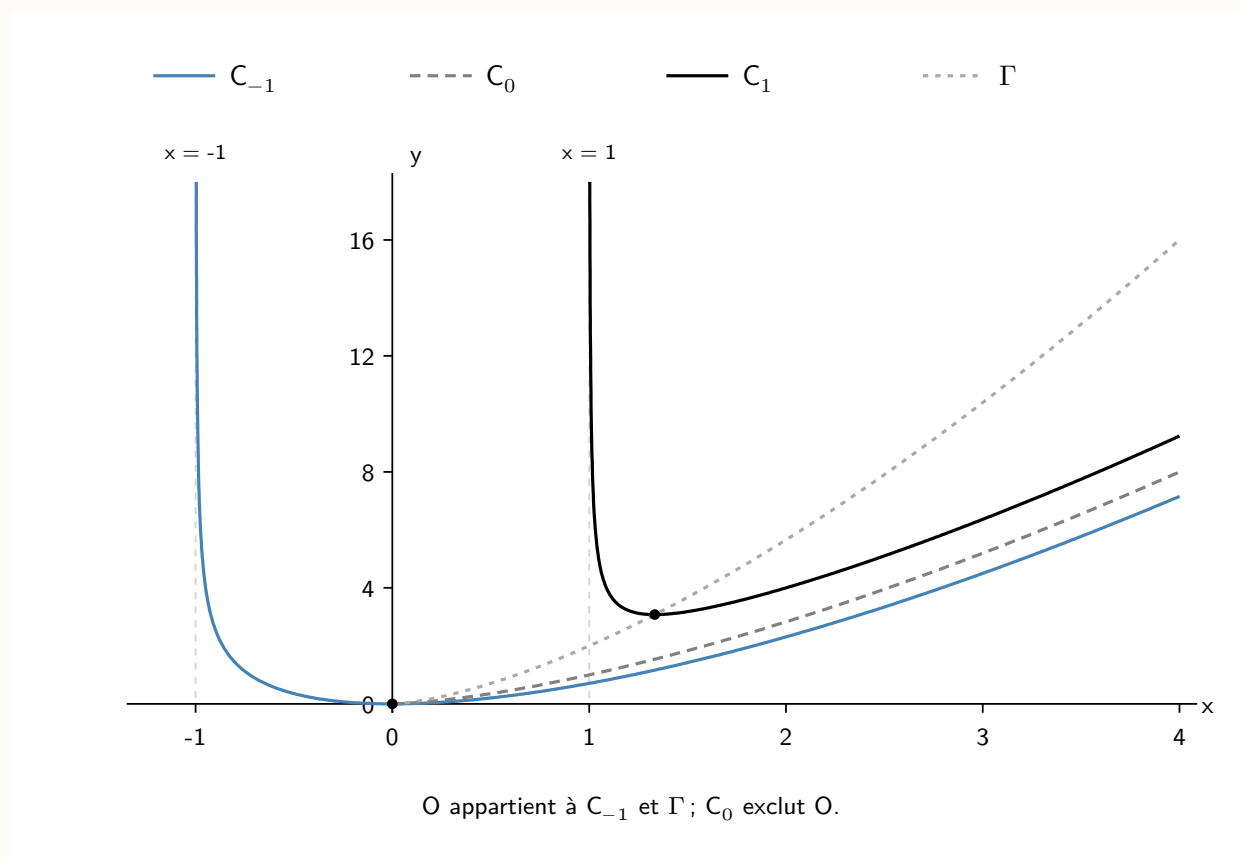
La courbe C_{-1} a pour asymptote verticale $x = -1$ et pour minimum O . La courbe C_0 part au voisinage de l'origine en restant définie seulement pour $x > 0$; elle est croissante et convexe. La courbe C_1 a pour asymptote verticale $x = 1$ et pour minimum

$$P_1 = \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3\sqrt{3}} \right) \simeq (1,333; 3,079).$$

Pour $x > 1$, les dénominateurs vérifient $\sqrt{x+1} > \sqrt{x} > \sqrt{x-1}$ et le numérateur est positif, donc $f_{-1}(x) < f_0(x) < f_1(x)$. Ce classement permet de contrôler le tracé.

Les courbes suivantes sont calculées à partir de leurs formules. Les axes utilisent des

échelles différentes, comme le permet le sujet. Le point O est rempli parce qu'il appartient à C_{-1} et à Γ ; il est exclu de C_0 .



Partie II

1.

Question adaptée au programme actuel — La reprise de I.3 porte sur les limites et les asymptotes verticales ou affines, selon la consigne adaptée de cette question.

Domaine et dérivées

Il faut $|x - a| > 0$, donc

$$\mathcal{D}(g_a) = \mathbb{R} \setminus \{a\}.$$

Sur $]a, +\infty[$, $g_a = f_a$ et l'étude de la partie I s'applique. Sur $] - \infty, a[$,

$$g_a(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a-x}}, \quad g'_a(x) = \frac{x(4a-3x)}{2(a-x)^{3/2}}.$$

Cette seconde dérivée première se calcule en dérivant $x^2(a-x)^{-1/2}$; le signe positif dans la dérivée de $(a-x)^{-1/2}$ vient de la dérivation de $a-x$.

On peut aussi observer la relation $g_a(x) = f_{-a}(-x)$ pour $x < a$. Ainsi cette branche s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées à partir de la branche droite de paramètre $-a$.

Variations lorsque $a > 0$

Sur la branche $x < a$, le zéro 0 appartient au domaine, tandis que $4a/3 > a$ n'appartient pas à cette branche. Le facteur $4a - 3x$ est positif pour $x < a$, donc le signe de la dérivée est celui de x .

Sur la branche $x > a$, on retrouve le minimum en $4a/3$. Posons, pour $a \neq 0$,

$$M_a = \frac{16}{3\sqrt{3}}|a|^{3/2}.$$

Les variations pour $a > 0$ sont :

Position de x	Signe de $g'_a(x)$	Variation ou valeur de g_a
$] -\infty, 0[$	—	$+\infty \searrow 0$
0	0	Minimum de la branche gauche : 0
$]0, a[$	+	$0 \nearrow +\infty$
$]a, 4a/3[$	—	$+\infty \searrow M_a$
$4a/3$	0	Minimum de la branche droite : M_a
$]4a/3, +\infty[$	+	$M_a \nearrow +\infty$

Le point $x = a$ est exclu et sépare les deux branches.

Variations lorsque $a < 0$

Sur la branche $x < a$, on a toujours $x < 0$ et le zéro $4a/3 < a$ appartient à cette branche.

Le signe de $x(4a - 3x)$ est négatif avant $4a/3$, puis positif entre $4a/3$ et a .

Sur la branche $x > a$, on retrouve le minimum en 0. Le tableau est :

Position de x	Signe de $g'_a(x)$	Variation ou valeur de g_a
$] - \infty, 4a/3[$	—	$+\infty \searrow M_a$
$4a/3$	0	Minimum de la branche gauche : M_a
$]4a/3, a[$	+	$M_a \nearrow +\infty$
$]a, 0[$	—	$+\infty \searrow 0$
0	0	Minimum de la branche droite : 0
$]0, +\infty[$	+	$0 \nearrow +\infty$

Variations lorsque $a = 0$

La fonction vaut $g_0(x) = |x|^{3/2}$ pour $x \neq 0$. Elle est décroissante sur la branche négative et croissante sur la branche positive :

Position de x	Signe de $g'_0(x)$	Variation de g_0
$] - \infty, 0[$	—	$+\infty \searrow 0$
$]0, +\infty[$	+	$0 \nearrow +\infty$

L'origine est exclue. La borne inférieure 0 n'est pas atteinte.

Limites et asymptotes

Si $a \neq 0$, le numérateur tend vers $a^2 > 0$ et le dénominateur vers 0^+ lorsque $x \rightarrow a$ depuis l'un ou l'autre côté. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g_a(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g_a(x) = +\infty.$$

La droite $x = a$ est une asymptote verticale aux deux branches. Si $a = 0$, les deux limites en 0 valent 0 ; il n'y a pas d'asymptote verticale.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, $|x - a|/|x| \rightarrow 1$, donc

$$g_a(x) \sim |x|^{3/2}, \quad g_a(x) \rightarrow +\infty.$$

En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_a(x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g_a(x)}{x} = -\infty.$$

Une asymptote affine nécessiterait une limite finie de ce quotient, comme expliqué en I.3. Il n'en existe donc à aucune des deux extrémités infinies.

Convexité et points d'inflexion

Sur chaque composante du domaine, la fonction est de classe C^2 . Le calcul donne

$$g_a''(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 8ax + 8a^2}{4(a-x)^{5/2}} & \text{si } x < a, \\ \frac{3x^2 - 8ax + 8a^2}{4(x-a)^{5/2}} & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Le numérateur est la somme de carrés étudiée en I.4. Il est strictement positif sur le domaine, y compris pour $a = 0$, car alors $x \neq 0$. Les deux dénominateurs sont positifs.

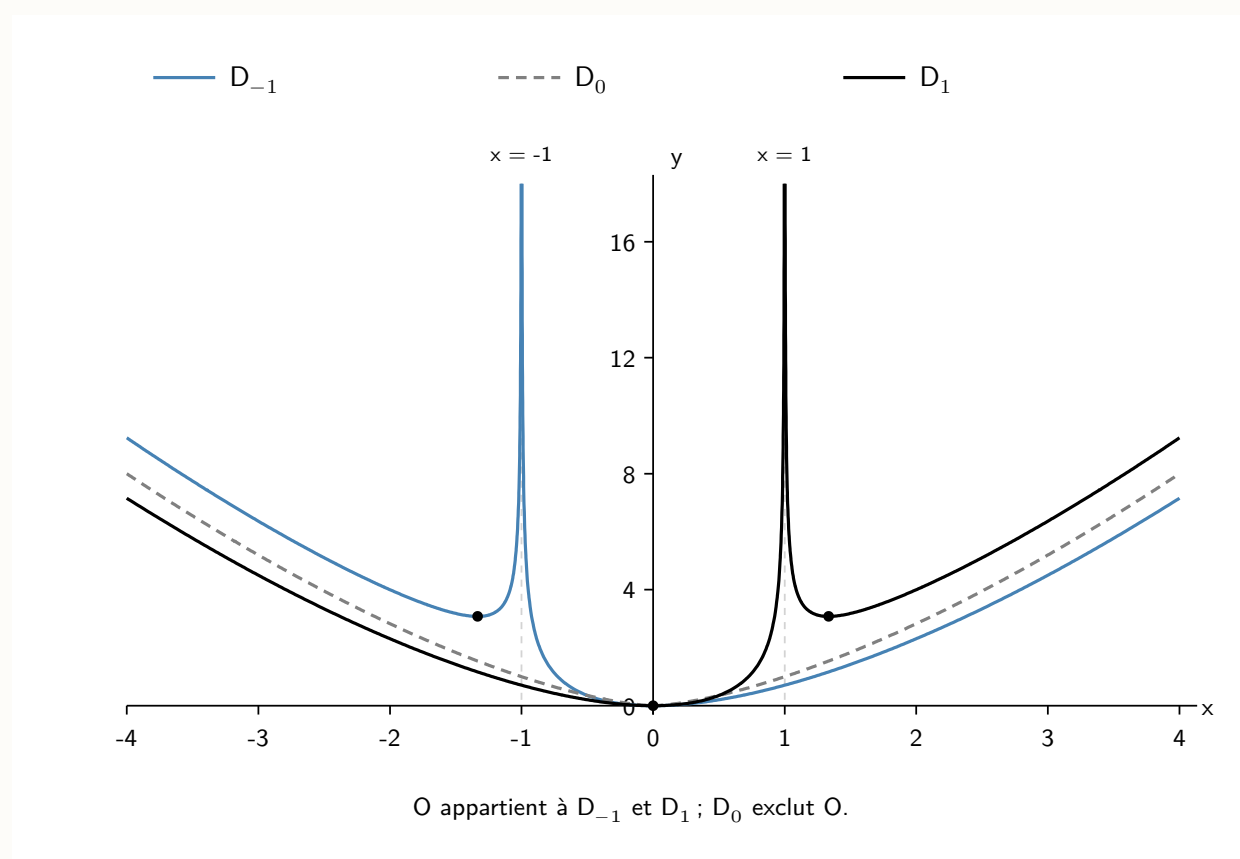
Chaque branche est donc strictement convexe et ne possède aucun point d'inflexion. On ne considère pas $x = a$ comme un tel point : il n'appartient pas à la courbe.

Construction des trois courbes

On trace $g_{-1}(x) = x^2/\sqrt{|x+1|}$, $g_0(x) = |x|^{3/2}$ pour $x \neq 0$, et $g_1(x) = x^2/\sqrt{|x-1|}$. Les asymptotes verticales sont $x = -1$ pour D_{-1} et $x = 1$ pour D_1 .

De plus, $g_{-1}(-x) = g_1(x)$, donc D_{-1} et D_1 se déduisent l'une de l'autre par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. La courbe D_0 est symétrique par rapport à ce même axe.

Les minima non nuls de D_{-1} et D_1 sont respectivement $(-4/3, M_1)$ et $(4/3, M_1)$, avec $M_1 = 16/(3\sqrt{3})$. L'origine appartient à D_{-1} et à D_1 , mais pas à D_0 ; elle est donc remplie sur le graphique commun.



2.

Posons $m = 16/(3\sqrt{3}) \simeq 3,0792$, minimum de la branche de D_1 située sur $]1, +\infty[$.

Sur $] -\infty, 0]$, g_1 décroît strictement de $+\infty$ à 0 ; sur $[0, 1[$, elle croît strictement de 0 à $+\infty$. Par continuité et stricte monotonie, chaque niveau $\lambda > 0$ est atteint une fois sur chacune de ces deux portions. Le niveau 0 est atteint seulement en $x = 0$.

Sur $]1, 4/3]$, g_1 décroît de $+\infty$ à m ; sur $[4/3, +\infty[$, elle croît de m à $+\infty$. Le niveau m est atteint une seule fois sur cette branche; un niveau supérieur l'est deux fois, et un niveau inférieur ne l'est pas.

On en déduit :

Valeur de λ	Nombre d'intersections avec D_1
$\lambda < 0$	0
$\lambda = 0$	1
$0 < \lambda < m$	2
$\lambda = m$	3
$\lambda > m$	4

Pour les approximations, on transforme les équations en équations polynomiales sur chaque branche. Si $\lambda > 0$ et $x < 1$, les deux membres de $x^2 = \lambda\sqrt{1-x}$ sont positifs ou nuls; l'élévation au carré est donc équivalente à

$$P_\lambda(x) = x^4 + \lambda^2 x - \lambda^2 = 0 \quad (x < 1).$$

Sur $x > 1$, on obtient de même

$$Q_\lambda(x) = x^4 - \lambda^2 x + \lambda^2 = 0 \quad (x > 1).$$

Il faut conserver ces restrictions de domaine après l'élévation au carré.

Niveau $\lambda = 1$

Comme $1 < m$, il y a seulement deux racines, toutes deux sur $x < 1$. On utilise $P_1(x) = x^4 + x - 1$. Les évaluations exactes aux dixièmes donnent

$$P_1(-1,3) = 0,5561 > 0, \quad P_1(-1,2) = -0,1264 < 0,$$

$$P_1(0,7) = -0,0599 < 0, \quad P_1(0,8) = 0,2096 > 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine dans chacun des intervalles $] -1,3, -1,2[$ et $]0,7, 0,8[$. L'unicité sur chaque portion, déjà établie par les variations de g_1 , garantit qu'il s'agit des deux abscisses cherchées.

Les valeurs approchées à 10^{-1} près par défaut sont donc

$$-1,3 \quad \text{et} \quad 0,7.$$

Niveau $\lambda = 4$

Comme $4 > m$, on cherche quatre abscisses. Pour les deux racines sur $x < 1$, $P_4(x) = x^4 + 16x - 16$ et

$$P_4(-2,8) = 0,6656 > 0, \quad P_4(-2,7) = -6,0559 < 0,$$

$$P_4(0,9) = -0,9439 < 0, \quad P_4(1) = 1 > 0.$$

On obtient une racine dans $] -2,8, -2,7[$ et une autre dans $]0,9, 1[$. L'évaluation de P_4 en 1 sert seulement à encadrer la racine polynomiale; le point $x = 1$ reste exclu de D_1 .

Pour les deux racines sur $x > 1$, $Q_4(x) = x^4 - 16x + 16$. On a

$$Q_4(1) = 1 > 0, \quad Q_4(1,1) = -0,1359 < 0.$$

Cela donne une racine dans $]1, 1,1[$, située sur la portion décroissante, puisque $1,1 < 4/3$. Enfin,

$$Q_4(2) = 16 - 32 + 16 = 0.$$

La racine $2 > 4/3$ est celle de la portion croissante et vérifie directement $g_1(2) = 4$. Les quatre approximations par défaut, dans l'ordre croissant, sont donc

$$-2,8, \quad 0,9, \quad 1,0, \quad 2,0.$$

Pour une abscisse négative, « par défaut » signifie bien prendre le dixième inférieur : on retient $-1,3$ plutôt que $-1,2$, et $-2,8$ plutôt que $-2,7$.

Partie III

Le paramètre a est toujours fixé. Dans les questions 2 et 3, $A > \max(a, 0)$ garantit que tous les dénominateurs et toutes les racines carrées sont définis sur $[A, +\infty[$.

1.

Pour un $x > a$ fixé, la seule difficulté de l'intégrale $\int_a^x f_a(t) dt$ est sa borne inférieure.

On effectue d'abord le changement de variable affine $u = t - a$ sur $[a + \varepsilon, x]$, avec $0 < \varepsilon < x - a$.

Pour $u > 0$, on a exactement

$$f_a(a + u) = \frac{(a + u)^2}{\sqrt{u}} = u^{3/2} + 2au^{1/2} + a^2u^{-1/2}.$$

Les trois puissances sont intégrables au voisinage de 0, car leurs exposants sont strictement supérieurs à -1 . Le terme comportant $2a$ est lui aussi absolument intégrable, quel que soit le signe de a .

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient donc une intégrale convergente pour chaque $x > a$. Lorsque $a = 0$, le dernier terme disparaît et l'intégrande est simplement $t^{3/2}$ pour $t > 0$; la convergence au bord reste vraie.

À l'infini, d'après I.3, $f_a(t) \sim t^{3/2}$, avec des fonctions positives pour t suffisamment grand. Ainsi, pour un seuil $B > \max(a, 0)$ assez grand,

$$f_a(t) \geq \frac{1}{2}t^{3/2} \quad (t \geq B).$$

Or $\int_B^{+\infty} t^{3/2} dt$ diverge vers $+\infty$. Par comparaison, l'intégrale de f_a diverge également à l'infini. Comme elle converge à la borne inférieure,

$$\int_a^{+\infty} f_a(t) dt = +\infty.$$

2.

On doit choisir les deux termes dominants de f_a et contrôler ce qui reste.

Méthode 1 — Taylor avec un reste contrôlé

On applique directement Taylor à une fonction régulière au voisinage de 0, sans composition formelle de développements limités.

Posons $H_a(u) = (1 - au)^{-1/2}$. On choisit $\delta > 0$ tel que $1 - au \geq 1/2$ pour $|u| \leq \delta$. C'est possible pour tout a , y compris $a = 0$. La fonction H_a est de classe C^3 sur un ouvert contenant ce segment, et

$$H_a(0) = 1, \quad H'_a(0) = \frac{a}{2}, \quad H''_a(0) = \frac{3a^2}{4}.$$

Sa dérivée troisième est

$$H_a'''(u) = \frac{15a^3}{8}(1-au)^{-7/2}.$$

Elle est bornée sur le segment choisi. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne donc une constante $K_a \geq 0$ telle que

$$H_a(u) = 1 + \frac{a}{2}u + \frac{3a^2}{8}u^2 + R_a(u), \quad |R_a(u)| \leq K_a|u|^3 \quad (|u| \leq \delta).$$

On utilise maintenant cette égalité avec reste contrôlé en $u = 1/x$, pour x assez grand. Comme $f_a(x) = x^{3/2}H_a(1/x)$, on obtient

$$f_a(x) = x^{3/2} + \frac{a}{2}x^{1/2} + \frac{3a^2}{8}x^{-1/2} + \rho_a(x), \quad |\rho_a(x)| \leq K_ax^{-3/2}.$$

Cherchons les coefficients nécessaires. Si $f_a(x) - \sqrt{x}(\alpha x + \beta) \rightarrow 0$, ce reste, divisé par $x^{3/2}$, tend encore vers 0. Or

$$\frac{f_a(x) - \sqrt{x}(\alpha x + \beta)}{x^{3/2}} \rightarrow 1 - \alpha.$$

Il faut donc $\alpha = 1$. Avec cette valeur, divisons le reste par $\sqrt{x}$: sa limite est $a/2 - \beta$, qui doit encore être nulle. Il faut $\beta = a/2$.

Réciproquement, avec ces deux coefficients, le développement contrôlé montre

$$f_a(x) - \sqrt{x}\left(x + \frac{a}{2}\right) = \frac{3a^2}{8\sqrt{x}} + \rho_a(x) \rightarrow 0.$$

Les valeurs sont donc uniques et valent

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{a}{2}.$$

Si $a \neq 0$, le coefficient $3a^2/8$ est strictement positif et

$$f_a(x) - \sqrt{x} \left(x + \frac{a}{2} \right) \sim \frac{3a^2}{8\sqrt{x}}.$$

Le reste est donc positif pour x assez grand. L'intégrale de $x^{-1/2}$ diverge à l'infini ; le critère d'équivalence pour fonctions de signe positif assure que l'intégrale demandée diverge vers $+\infty$.

Si $a = 0$, $f_0(x) = x^{3/2}$, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$: l'intégrande est identiquement nul et l'intégrale converge, avec valeur 0.

Méthode 2 — Rationalisations et identité exacte

Pour $x > A$, posons $s = \sqrt{1 - a/x} > 0$. On a $s \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, et $a/x = 1 - s^2$. Le premier terme dominant est nécessairement $x^{3/2}$, puisque $f_a(x)/x^{3/2} = 1/s \rightarrow 1$; il faut donc $\alpha = 1$.

En rationalisant,

$$f_a(x) - x^{3/2} = x^{3/2} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = \frac{a\sqrt{x}}{s(1+s)}.$$

Après division par $\sqrt{x}$, cette différence tend vers $a/2$, donc $\beta = a/2$ est nécessaire. Pour contrôler le reste sans Taylor, on utilise

$$\frac{1}{s} - 1 - \frac{1 - s^2}{2} = \frac{(s - 1)^2(s + 2)}{2s}.$$

Comme $(s - 1)^2 = (a/x)^2/(1 + s)^2$, cela donne exactement

$$f_a(x) - x^{3/2} - \frac{a}{2}\sqrt{x} = \frac{a^2}{\sqrt{x}} \frac{s+2}{2s(1+s)^2}.$$

Le dernier facteur tend vers $3/8$. La différence tend donc vers 0, ce qui prouve que les coefficients conviennent. Si $a \neq 0$, elle est positive et équivalente à $3a^2/(8\sqrt{x})$: son intégrale diverge vers $+\infty$. Si $a = 0$, elle est nulle et l'intégrale converge.

La méthode de Taylor fournit d'emblée une borne utile pour les questions suivantes. La rationalisation retrouve les coefficients par des identités algébriques et montre directement la positivité du reste lorsque $a \neq 0$.

Dans les deux cas, il n'y a aucune difficulté sur un segment commençant en A , puisque $A > \max(a, 0)$. Cette question montre qu'une fonction tendant vers 0 peut néanmoins avoir une intégrale divergente sur un intervalle infini.

3.

On conserve $\alpha = 1$ et $\beta = a/2$ obtenus en 2.

Méthode 1 — Utilisation de la borne du reste de Taylor

Le reste contrôlé de la question précédente donne

$$f_a(x) - \sqrt{x} \left(x + \frac{a}{2} + \frac{\gamma}{x} \right) = \left(\frac{3a^2}{8} - \gamma \right) x^{-1/2} + \rho_a(x), \quad |\rho_a(x)| \leq K_a x^{-3/2}.$$

En prenant

$$\gamma = \frac{3a^2}{8},$$

le terme non intégrable en $x^{-1/2}$ disparaît. Il reste $\rho_a(x)$, dont la valeur absolue est majorée, à partir d'un certain seuil, par $K_a x^{-3/2}$. L'intégrale de cette puissance converge

à l'infini.

L'intégrande est continu sur chaque segment de $[A, +\infty[$, donc l'intégrale demandée converge absolument.

La valeur de γ est également nécessaire. Si $\gamma \neq 3a^2/8$, le reste est équivalent à $cx^{-1/2}$ avec $c = 3a^2/8 - \gamma \neq 0$. Il a le signe de c pour x assez grand et son intégrale diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon ce signe.

Ainsi la seule valeur convenable est $\gamma = 3a^2/8$. Pour $a = 0$, cela donne $\gamma = 0$ et un intégrande nul, conformément au cas particulier de la question précédente.

Méthode 2 — Contrôle algébrique du reste après la seconde soustraction

Avec $s = \sqrt{1 - a/x}$ comme en 2, le facteur du reste vérifie

$$\frac{s+2}{2s(1+s)^2} - \frac{3}{8} = \frac{(1-s)(3s^2+9s+8)}{8s(1+s)^2}.$$

Comme $1-s = a/(x(1+s))$, l'identité exacte de 2 donne

$$f_a(x) - x^{3/2} - \frac{a}{2}\sqrt{x} - \frac{3a^2}{8\sqrt{x}} = \frac{a^3}{x^{3/2}} \frac{3s^2+9s+8}{8s(1+s)^3}.$$

Le dernier facteur tend vers $5/16$, donc il est borné pour x assez grand. La valeur absolue de l'intégrande est ainsi majorée par une constante fois $x^{-3/2}$, ce qui prouve la convergence absolue pour $\gamma = 3a^2/8$.

Une autre valeur de γ laisserait le terme $(3a^2/8 - \gamma)x^{-1/2}$, non intégrable et de signe constant à partir d'un certain seuil; elle ne peut donc pas convenir.

Les deux méthodes donnent la même valeur unique et la même borne d'ordre $x^{-3/2}$: la première vient de Taylor, la seconde d'une factorisation exacte.

4.

L'intégrale converge d'après III.1. Pour la calculer, on reprend le changement de variable affine $u = x - a$, d'abord avec une borne inférieure $a + \varepsilon$.

La décomposition exacte de l'intégrande donne, pour $u > 0$,

$$\frac{x^2}{\sqrt{x-a}} = u^{3/2} + 2au^{1/2} + a^2u^{-1/2}.$$

Une primitive en u est

$$\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{4a}{3}u^{3/2} + 2a^2u^{1/2}.$$

Les trois termes tendent vers 0 lorsque $u \rightarrow 0^+$. On peut donc passer à la limite à la borne inférieure et obtenir

$$I_n = \frac{2}{5}(n-a)^{5/2} + \frac{4a}{3}(n-a)^{3/2} + 2a^2\sqrt{n-a} \quad (n > a).$$

Une forme équivalente, obtenue en mettant $\sqrt{n-a}$ en facteur, est

$$I_n = \frac{2}{15}\sqrt{n-a}(3n^2 + 4an + 8a^2).$$

En particulier, pour a fixé,

$$\frac{I_n}{n^{5/2}} = \frac{2}{15}\sqrt{1-\frac{a}{n}}\left(3 + \frac{4a}{n} + \frac{8a^2}{n^2}\right) \rightarrow \frac{2}{5}.$$

On dispose donc de l'équivalent $I_n \sim (2/5)n^{5/2}$, qui sera utilisé dans la question suivante.

5.

L'entier N satisfait $N > |4a/3|$. Il est donc strictement positif, strictement supérieur à a et à $4a/3$. Tous les termes de S_n sont bien définis et positifs pour $n > N$.

Comme $f_a(k) \sim k^{3/2}$, on a $f_a(k) \rightarrow +\infty$. À partir d'un certain rang $k_0 > N$, $f_a(k) \geq 1$. Par conséquent, pour $n \geq k_0$,

$$S_n \geq \sum_{k=k_0}^n 1 = n - k_0 + 1 \rightarrow +\infty.$$

Pour établir l'encadrement, on utilise la monotonie de f_a . Pour tout $x \geq N$, $x > 0$ et $3x - 4a > 0$. La formule de I.2 assure $f'_a(x) > 0$. La fonction est donc croissante sur $[N, +\infty[$.

Pour chaque entier $k \geq N + 1$, les comparaisons sur des segments de longueur 1 donnent

$$\int_{k-1}^k f_a(x) \, dx \leq f_a(k) \leq \int_k^{k+1} f_a(x) \, dx.$$

En sommant de $k = N + 1$ à n et en utilisant Chasles,

$$\int_N^n f_a(x) \, dx \leq S_n \leq \int_{N+1}^{n+1} f_a(x) \, dx.$$

Les intégrales I_n , I_N , I_{n+1} et I_{N+1} convergent au bord a ; on peut donc écrire les différences

$$I_n - I_N \leq S_n \leq I_{n+1} - I_{N+1},$$

ce qui est l'encadrement demandé.

Les nombres I_N et I_{N+1} sont constants lorsque n varie. Par III.4, $I_n/n^{5/2} \rightarrow 2/5$. De même,

$$\frac{I_{n+1}}{n^{5/2}} = \frac{I_{n+1}}{(n+1)^{5/2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5/2} \rightarrow \frac{2}{5}.$$

En divisant l'encadrement par $n^{5/2} > 0$, les deux bornes tendent donc vers $2/5$. Le théorème d'encadrement donne

$$\frac{S_n}{n^{5/2}} \rightarrow \frac{2}{5}, \quad S_n \sim \frac{2}{5}n^{5/2}.$$

6.

On établit d'abord la convergence de la série

$$\sum_{k \geq 1} u_k,$$

puis on utilise le télescopage des différences de racines carrées.

Méthode 1 — Rationalisation et comparaison à une série de Riemann

Pour $k \geq 1$, on a $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = 1/(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$. Ainsi

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}.$$

Cette expression est positive. Comme $\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \geq 2\sqrt{k}$,

$$0 < u_k \leq \frac{1}{4k^{3/2}}.$$

La série de Riemann d'exposant $3/2 > 1$ converge, donc la série de terme général u_k converge par comparaison. On a aussi $u_k \sim 1/(4k^{3/2})$.

Méthode 2 — Écart entre une somme et une intégrale

La primitive de $t^{-1/2}$ sur $]0, +\infty[$ donne

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt.$$

La fonction $\varphi(t) = t^{-1/2}$ est décroissante et de classe C^1 sur le segment $[k, k+1]$, avec $|\varphi'(t)| \leq 1/(2k^{3/2})$. L'inégalité des accroissements finis donne, pour $t \in [k, k+1]$,

$$0 \leq \varphi(k) - \varphi(t) \leq \frac{t - k}{2k^{3/2}}.$$

En intégrant sur le segment,

$$0 \leq u_k \leq \frac{1}{2k^{3/2}} \int_k^{k+1} (t - k) dt = \frac{1}{4k^{3/2}}.$$

La même comparaison à une série de Riemann assure la convergence. La première méthode est purement algébrique ; la seconde interprète u_k comme l'erreur commise en remplaçant une intégrale par un rectangle.

Pour calculer les sommes partielles, on revient à la définition et on télescope :

$$\sum_{k=1}^n u_k = T_n - 2 \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = T_n - 2\sqrt{n+1} + 2.$$

Notons U la somme finie de la série convergente

$$\sum u_k.$$

Ses sommes partielles sont bornées et tendent vers U . On a donc

$$T_n = 2\sqrt{n+1} - 2 + \sum_{k=1}^n u_k.$$

Après division par $2\sqrt{n}$,

$$\frac{T_n}{2\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\sum_{k=1}^n u_k - 2}{2\sqrt{n}} \rightarrow 1.$$

Ainsi

$$T_n \sim 2\sqrt{n}.$$

7.

Les fonctions $x \mapsto x\sqrt{x} = x^{3/2}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur le segment $[0, 1]$. Les sommes de Riemann pour la subdivision régulière de pas $1/n$, avec les extrémités droites, convergent donc vers leurs intégrales.

On réécrit d'abord

$$\frac{V_n}{n^{5/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{3/2}.$$

Par la convergence des sommes de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V_n}{n^{5/2}} = \int_0^1 x^{3/2} dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{2}{5}.$$

De même,

$$\frac{W_n}{n^{3/2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}},$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{n^{3/2}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

On a bien utilisé la méthode des sommes de Riemann imposée par l'énoncé. En particulier, $V_n \sim (2/5)n^{5/2}$ et $W_n \sim (2/3)n^{3/2}$.

8.

On utilise la soustraction des trois termes obtenus en III.3, puis les résultats sur T_n , V_n et W_n .

Pour $k \geq N + 1$, posons

$$r_k = \frac{k^2}{\sqrt{k-a}} - k\sqrt{k} - \frac{a}{2}\sqrt{k} - \frac{3a^2}{8\sqrt{k}}.$$

Tous ces termes sont définis, car $N > \max(a, 0)$. La borne de Taylor établie en III.2 et utilisée en III.3 assure, pour k assez grand,

$$|r_k| \leq K_a k^{-3/2}.$$

La série de Riemann correspondante converge. Les termes initiaux sont en nombre fini, donc

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} r_k$$

converge absolument. Ses sommes partielles

$$R_n = \sum_{k=N+1}^n r_k$$

sont par conséquent bornées.

La convergence de l'intégrale de III.3 ne serait pas, à elle seule, une justification de la convergence de cette série : c'est la borne explicite du reste qui permet la comparaison.

En sommant l'identité définissant r_k , on obtient exactement

$$S_n = (V_n - V_N) + \frac{a}{2}(W_n - W_N) + \frac{3a^2}{8}(T_n - T_N) + R_n.$$

Les termes d'indice N sont des constantes. Divisons par $n^{5/2}$. Par III.7,

$$\frac{V_n}{n^{5/2}} \rightarrow \frac{2}{5}, \quad \frac{W_n}{n^{5/2}} = \frac{1}{n} \frac{W_n}{n^{3/2}} \rightarrow 0.$$

Par III.6,

$$\frac{T_n}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^2} \frac{T_n}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Enfin, les constantes et le reste borné R_n , divisés par $n^{5/2}$, tendent vers 0. Il vient

$$\frac{S_n}{n^{5/2}} \rightarrow \frac{2}{5}.$$

On retrouve donc, par une décomposition différente de la comparaison intégrale de III.5,

$$S_n \sim \frac{2}{5}n^{5/2}.$$

Relevé des adaptations

– I.3 et II.1 : l'étude des branches infinies est reformulée en étude des limites et des éventuelles asymptotes verticales ou affines, conformément aux exclusions du référentiel. Les autres questions et les données du sujet sont conservées.