



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1981

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Les trois parties sont indépendantes. Dans tout le problème, $\alpha > 0$ et f est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$.

Partie I

Préambule — Question adaptée au programme actuel : on explicite $P(X \geq t) > 0$ pour $t > 0$, condition nécessaire pour que la probabilité conditionnelle de l'énoncé soit définie.

1. Puisque la fonction de répartition F est continue, X n'a aucun atome : pour chaque t ,

$$P(X = t) = F(t) - \lim_{u \rightarrow t^-} F(u) = 0.$$

Pour $t > 0$ et $h > 0$, l'événement considéré sous le conditionnement est $\{t \leq X \leq t + h\}$. L'absence d'atome en t donne

$$P(X \leq t + h \mid X \geq t) = \frac{F(t + h) - F(t)}{1 - F(t)}.$$

Le dénominateur vaut $P(X \geq t) > 0$ par hypothèse. En divisant par h et en passant à la limite à droite, la dérivabilité de F au point t donne

$$\frac{F'(t)}{1 - F(t)} = f(t)F(t)^\alpha.$$

En multipliant par $1 - F(t)$, on obtient $F'(t) = f(t)F(t)^\alpha(1 - F(t))$ pour tout $t > 0$.

2. La continuité de F et sa nullité sur $\mathbb{R}_-$ donnent $F(0) = 0$ et $F(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$.
 Par 1., la continuité de f en 0 et l'hypothèse $\alpha > 0$,

$$F'(t) = f(t)F(t)^\alpha(1 - F(t)) \rightarrow f(0) \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Pour $h > 0$, F est continue sur $[0, h]$ et dérivable sur $]0, h[$. Le théorème des accroissements finis fournit $c_h \in]0, h[$ tel que

$$\frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(c_h).$$

Lorsque $h \rightarrow 0^+$, on a $c_h \rightarrow 0^+$, donc ce quotient tend vers zéro. La dérivée à droite existe et vaut $F'_d(0) = 0$.

Partie II

Dans cette partie, F est une fonction définie indépendamment de la variable aléatoire de la partie I. On utilise uniquement les hypothèses propres à cette partie et la relation (1).

1. Pour $x > 0$, la condition $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et les valeurs de F dans $[0, 1[$ donnent $0 < F(x) < 1$. Comme $f(x) > 0$,

$$F'(x) = f(x)F(x)^\alpha(1 - F(x)) > 0.$$

La dérivabilité implique la continuité, y compris à droite en 0. Le théorème des accroissements finis montre donc que F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle est majorée par 1 ; le théorème de la limite monotone donne une limite finie $L \leq 1$. De plus $L \geq F(1) > 0$.

Ainsi $L \in]0, 1]$.

2. (a) Fixons $x > 0$. Pour $0 < y \leq x$, on a $0 < F(y) \leq F(x) < 1$. L'intégrande $t \mapsto 1/(t^\alpha(1 - t))$ est continue sur tout segment contenu dans $]0, 1[$.

Par le théorème fondamental du calcul intégral et la dérivation d'une composée, la dérivée de la première intégrale de H vaut $-F'(y)/(F(y)^\alpha(1 - F(y)))$. La dérivée de la seconde, précédée du signe moins, vaut $f(y)$. Ainsi,

$$H'(y) = -\frac{F'(y)}{F(y)^\alpha(1 - F(y))} + f(y) = 0,$$

où la dernière égalité utilise (1). Tous les dénominateurs sont non nuls. La fonction H est dérivable à l'intérieur de l'intervalle, et à gauche au bord x .

Elle est constante sur $]0, x]$, et $H(x) = 0$. Par conséquent,

$$\int_{F(y)}^{F(x)} \frac{dt}{t^\alpha(1 - t)} = \int_y^x f(t) dt \quad (0 < y \leq x).$$

- (b) Lorsque $y \rightarrow 0^+$, la continuité de F en 0 donne $F(y) \rightarrow 0$, tandis que la continuité de f sur $[0, x]$ donne $\int_y^x f(t) dt \rightarrow \int_0^x f(t) dt$, une valeur finie.

Pour justifier que l'on obtient la limite définissant l'intégrale impropre, observons que F est continue et strictement croissante sur $[0, x]$. Elle envoie donc $]0, x]$ bijectivement sur

$]0, F(x)]$. Les bornes inférieures $F(y)$ parcourent toutes les bornes positives possibles et tendent vers zéro lorsque y tend vers zéro. L'égalité de a) établit donc la convergence et la valeur

$$\int_0^{F(x)} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)} = \int_0^x f(t) dt.$$

Au voisinage de 0 à droite, $1/(t^\alpha(1-t)) \sim t^{-\alpha}$. Les deux fonctions sont positives. Le critère d'équivalence pour les intégrales impropres à termes positifs, associé à la convergence de $\int_0^b t^{-\alpha} dt$ si et seulement si $\alpha < 1$, donne nécessairement $\alpha < 1$.

Avec l'hypothèse initiale, on dispose désormais de $0 < \alpha < 1$ dans toute la suite de la partie II.

(c) Pour $0 < t < 1$, $t^\alpha \leq 1$, donc $1/(t^\alpha(1-t)) \geq 1/(1-t)$. Par b),

$$\int_0^x f(t) dt \geq \int_0^{F(x)} \frac{dt}{1-t} = \ln \left(\frac{1}{1-F(x)} \right).$$

Si $F(x) \rightarrow 1$, le membre droit tend vers $+\infty$. Puisque f est positive, son intégrale impropre diverge donc vers $+\infty$: $\int_0^{+\infty} f(t) dt = +\infty$.

3. (a) Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine est précisé dans l'énoncé.

Comme $0 < \alpha < 1$, si α est rationnel, on peut écrire $\alpha = r/s$ avec des entiers $1 \leq r < s$. Posons $t = u^s$. Sur un segment dont la borne inférieure est strictement positive, il s'agit d'un changement de variable C^1 strictement croissant ; $dt = su^{s-1} du$ et $t^\alpha = u^r$.

En appliquant ce changement sur $[\varepsilon, F(x)]$, puis en faisant tendre ε vers zéro, on obtient

$$\int_0^{F(x)} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)} = s \int_0^{F(x)^{1/s}} \frac{u^{s-r-1}}{1-u^s} du.$$

L'intégrande de droite est une fraction rationnelle. L'exposant $s - r - 1$ est un entier positif ou nul, et la borne supérieure est strictement inférieure à 1. Le changement ramène donc le calcul à l'intégration demandée, sans difficulté nouvelle en 0.

(b) Question adaptée au programme actuel : l'expression utilisant la tangente hyperbolique est réécrite uniquement avec des exponentielles.

Pour $\alpha = 1/2$, le changement de variable de a) est $t = u^2$. Avec $v = \sqrt{F(x)} \in [0, 1[$,

$$\int_0^{F(x)} \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)} = 2 \int_0^v \frac{du}{1-u^2} = \int_0^v \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du = \ln \left(\frac{1+v}{1-v} \right).$$

L'égalité de 2.(b), avec $I(x) = \int_0^x f(t) dt$, donne $\ln((1+v)/(1-v)) = I(x)$. Les quantités $1-v$ et $e^{I(x)} + 1$ sont strictement positives. En exponentiant puis en résolvant,

$$1+v = e^{I(x)}(1-v), \quad v = \frac{e^{I(x)} - 1}{e^{I(x)} + 1}.$$

En élevant au carré, on obtient pour tout $x \geq 0$

$$F(x) = \left(\frac{e^{I(x)} - 1}{e^{I(x)} + 1} \right)^2.$$

Dans le cas $f(x) = 1/(x+1)$, on a $I(x) = \ln(x+1)$ et $e^{I(x)} = x+1$. Ainsi,

$$F(x) = \left(\frac{x}{x+2} \right)^2.$$

Cette fonction vaut zéro seulement en 0, appartient à $[0, 1[$, est dérivable sur $[0, +\infty[$ et vérifie

$$F'(x) = \frac{4x}{(x+2)^3}.$$

Pour $x > 0$, le membre droit de (1) vaut

$$\frac{1}{x+1} \frac{x}{x+2} \left(1 - \frac{x^2}{(x+2)^2} \right) = \frac{1}{x+1} \frac{x}{x+2} \frac{4(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{4x}{(x+2)^3}.$$

Les hypothèses sont donc bien satisfaites, et $F(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Prolongée par zéro pour $x < 0$, elle est une fonction de répartition; on peut prendre pour densité $\rho(x) = 4x/(x+2)^3$ si $x > 0$ et $\rho(x) = 0$ si $x \leq 0$. En effet, cette fonction est positive ou nulle et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut $\lim_{R \rightarrow +\infty} (F(R) - F(0)) = 1$.

4. (a) On travaille pour $0 < x < 1$ et un entier $n \geq 0$. Comme $0 < \alpha < 1$, on a

$$\int_0^x t^{-\alpha} dt = x^{1-\alpha}/(1-\alpha). \text{ La différence demandée s'écrit}$$

$$G(x) - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int_0^x t^{-\alpha} \left(\frac{1}{1-t} - 1 \right) dt = \int_0^x \frac{t^{1-\alpha}}{1-t} dt.$$

En utilisant l'identité géométrique finie de l'énoncé,

$$G(x) - \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+2-\alpha}}{k+2-\alpha} + \int_0^x \frac{t^{n+2-\alpha}}{1-t} dt.$$

Chaque dénominateur $k+2-\alpha$ est strictement positif. En multipliant par $x^{\alpha-2}$, on obtient

$$x^{\alpha-2}G(x) - \frac{1}{x(1-\alpha)} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+2-\alpha} + R_n(x),$$

avec $R_n(x) = x^{\alpha-2} \int_0^x \frac{t^{n+2-\alpha}}{1-t} dt$. Pour $0 \leq t \leq x < 1$, on a $1/(1-t) \leq 1/(1-x)$; ainsi,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+3-\alpha)(1-x)}.$$

Il en résulte $R_n(x) = o(x^n)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, y compris pour $n = 0$. Le développement limité demandé est donc

$$x^{\alpha-2}G(x) - \frac{1}{x(1-\alpha)} = \frac{1}{2-\alpha} + \frac{x}{3-\alpha} + \cdots + \frac{x^n}{n+2-\alpha} + o(x^n).$$

(b) Méthode 1 — Utilisation de l'équivalence de G

En particulier, a) donne $G(u) = \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} + O(u^{2-\alpha})$, donc

$$G(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

La continuité de f en 0, avec $f(0) > 0$, donne $I(x) = \int_0^x f(t) dt \sim f(0)x$. Par exemple, les bornes $f(0) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(0) + \varepsilon$ près de 0, intégrées sur $[0, x]$, établissent ce rapport limite.

Comme $F(x) \rightarrow 0$ et $F(x) > 0$ pour $x > 0$, on peut appliquer l'équivalence de G en évaluant son rapport en $u = F(x)$. L'égalité $G(F(x)) = I(x)$ de 2.(b) entraîne

$$F(x)^{1-\alpha} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} (1-\alpha)f(0)x.$$

Ces quantités sont positives. En prenant la puissance fixe $1/(1-\alpha)$ du rapport, dont la limite est 1, on conclut

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} ((1-\alpha)f(0)x)^{1/(1-\alpha)}.$$

Méthode 2 — Transformation directe de l'équation différentielle

Pour $x > 0$, posons $V(x) = F(x)^{1-\alpha}$. Comme $F(x) > 0$, la dérivation et (1) donnent

$$V'(x) = (1-\alpha)F(x)^{-\alpha}F'(x) = (1-\alpha)f(x)(1-F(x)).$$

Pour $0 < \varepsilon < x$, on intègre cette égalité sur $[\varepsilon, x]$. Le membre droit est continu et se prolonge continûment en 0; de plus $V(\varepsilon) \rightarrow 0$. Le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$ donne donc

$$F(x)^{1-\alpha} = (1-\alpha) \int_0^x f(t)(1-F(t)) dt.$$

L'intégrande tend vers $f(0) > 0$ en 0, donc le membre droit est équivalent à $(1-\alpha)f(0)x$. En prenant la puissance $1/(1-\alpha)$ du rapport de quantités positives, on retrouve $F(x) \sim ((1-\alpha)f(0)x)^{1/(1-\alpha)}$.

La première méthode suit la dépendance demandée à la question a); la seconde montre que la puissance $F^{1-\alpha}$ possède une dérivée dont la limite est directement accessible.

L'hypothèse $f(0) \neq 0$ est ici automatiquement satisfaite puisque f prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

5. Pour $0 < t < 1$, on a $t^{-\alpha} \geq 1$. En intégrant, on obtient la borne inférieure

$$G(x) \geq \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

Pour la borne supérieure, calculons la différence :

$$G(x) - \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) = \int_0^x \frac{t^{-\alpha} - 1}{1-t} dt = \int_0^x t^{-\alpha} \frac{1-t^\alpha}{1-t} dt.$$

Comme $0 < \alpha < 1$ et $0 < t < 1$, on a $t < t^\alpha < 1$, donc $0 < (1-t^\alpha)/(1-t) < 1$. Pour $0 < x < 1$, l'intégrale précédente est strictement inférieure à

$$\int_0^x t^{-\alpha} dt = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \frac{1}{1-\alpha}.$$

Pour $x = 0$, les deux premiers termes sont nuls et $0 < 1/(1-\alpha)$, donc les inégalités restent valables. Ainsi,

$$\ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \leq G(x) < \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{1-\alpha} \quad (0 \leq x < 1).$$

Appliquons ces bornes à $F(x)$ et utilisons $G(F(x)) = I(x)$. Elles donnent

$$I(x) - \frac{1}{1-\alpha} < \ln \left(\frac{1}{1-F(x)} \right) \leq I(x).$$

La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit $e^{-I(x)} \leq 1 - F(x) < e^{1/(1-\alpha)-I(x)}$.

En soustrayant à 1,

$$1 - e^{1/(1-\alpha)-I(x)} < F(x) \leq 1 - e^{-I(x)}.$$

Cet encadrement vaut aussi pour $x = 0$, où $F(0) = I(0) = 0$.

6. La positivité de f et la divergence de son intégrale donnent $I(x) \rightarrow +\infty$. Les deux bornes de 5. tendent vers 1, donc $F(x) \rightarrow 1$.

Méthode 1 — Construction d'une densité

Pour $x > 0$, posons $\rho(x) = F'(x) = f(x)F(x)^\alpha(1 - F(x))$, et posons $\rho(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Cette fonction est positive ou nulle et continue pour $x > 0$. Comme $F(x) \rightarrow 0$ à droite en 0, $\alpha > 0$ et f est continue en 0, on a $\rho(x) \rightarrow 0$: elle est donc continue sur tout $\mathbb{R}$.

La même relation montre que la dérivée de F se prolonge continûment à droite en 0. Le théorème des accroissements finis, comme en I.2, donne $F'_d(0) = 0$. Pour tout $R > 0$, le théorème fondamental du calcul intégral donne alors

$$\int_0^R \rho(t) dt = F(R) - F(0) = F(R).$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) dt = 1$. La fonction ρ est donc une densité de probabilité. Une variable aléatoire de cette densité a pour fonction de répartition zéro sur $] -\infty, 0]$ et $F(x)$ pour $x > 0$. La restriction demandée est ainsi réalisée.

Méthode 2 — Transformation d'une variable uniforme

La fonction F est continue et strictement croissante, vérifie $F(0) = 0$, reste strictement inférieure à 1 et tend vers 1. Elle définit donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$, dont l'inverse est croissante et continue.

Soit U de loi uniforme sur $]0, 1[$, et définissons $Y = F^{-1}(U)$. Pour $x > 0$, la croissance de F donne $\{Y \leq x\} = \{U \leq F(x)\}$, donc

$$P(Y \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

Pour $x \leq 0$, on a $Y > 0$, donc la probabilité vaut zéro. La fonction de répartition de Y est bien le prolongement de F par zéro à gauche.

La première méthode produit la densité ; la seconde donne une construction par inversion de la fonction de répartition. Les deux réalisent la conclusion sans utiliser de

résultat général supplémentaire sur les équations différentielles.

Partie III

On fixe $x_0 \in]0, 1[$. Les intégrales ont pour seule borne éventuellement impropre 0, puisque $1 - t$ reste strictement positif jusqu'à x_0 .

1. Pour tout réel z , au voisinage de 0 à droite,

$$\frac{t^z}{1-t} \sim t^z.$$

Les fonctions sont positives. L'intégrale $\int_0^{x_0} t^z dt$ converge si et seulement si $z > -1$; le critère d'équivalence pour les intégrales positives donne donc exactement le domaine $] -1, +\infty[$.

Pour $z = 0$,

$$g(0) = \int_0^{x_0} \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x_0).$$

Comme $t/(1-t) = 1/(1-t) - 1$, on a $g(1) = -\ln(1-x_0) - x_0$.

Pour un entier $n \geq 1$, l'identité géométrique finie donne

$t^n/(1-t) = 1/(1-t) - (1+t+\dots+t^{n-1})$. En intégrant cette somme finie,

$$g(n) = -\ln(1-x_0) - \sum_{k=1}^n \frac{x_0^k}{k}.$$

Cette expression vaut aussi pour $n = 0$ si la somme vide est prise égale à zéro.

2. (a) Si $-1 < z_1 < z_2$ et $0 < t \leq x_0 < 1$, alors $t^{z_2} < t^{z_1}$. En divisant par $1-t > 0$ et en intégrant, on obtient $g(z_2) < g(z_1)$.

La stricte inégalité des intégrales se justifie, par exemple, sur le segment $[x_0/2, x_0]$ où la différence des deux intégrandes est continue et strictement positive. Les deux intégrales impropres existent par 1. La fonction g est donc strictement décroissante sur son domaine.

(b) Pour $0 < t \leq x_0$, on a $1 \leq 1/(1-t) \leq 1/(1-x_0)$. Si $z > -1$, les intégrales convergent ; on peut multiplier par $t^z > 0$ puis intégrer :

$$\frac{x_0^{z+1}}{z+1} \leq g(z) \leq \frac{x_0^{z+1}}{(z+1)(1-x_0)}.$$

Lorsque $z \rightarrow -1^+$, $x_0^{z+1} \rightarrow 1$ et $z+1 \rightarrow 0^+$. La borne inférieure tend vers $+\infty$, donc $g(z) \rightarrow +\infty$.

Lorsque $z \rightarrow +\infty$, $x_0^{z+1} = e^{(z+1)\ln x_0} \rightarrow 0$ puisque $\ln x_0 < 0$. La borne supérieure tend vers zéro et $g(z) > 0$; par encadrement, $g(z) \rightarrow 0$.

(c) D'après 1., la somme partielle d'ordre n est

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_0^k}{k} = -\ln(1-x_0) - g(n).$$

La question b) donne $g(n) \rightarrow 0$. Les sommes partielles convergent donc et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_0^k}{k} = -\ln(1-x_0).$$

Cette preuve utilise une identité intégrée à somme finie, puis une limite de sommes partielles ; elle n'intervient pas automatiquement une série et une intégrale.

3. Fixons $z > -1$ et posons $\delta = (z+1)/2 > 0$. Pour $j = 1$ ou $j = 2$, les croissances comparées donnent $t^\delta |\ln t|^j \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$: cela se ramène à $(\ln u)^j / u^\delta \rightarrow 0$ avec $u = 1/t \rightarrow +\infty$.

Pour t assez petit, $|\ln t|^j \leq t^{-\delta}$. Comme $1/(1-t) \leq 1/(1-x_0)$,

$$\frac{t^z |\ln t|^j}{1-t} \leq \frac{t^{z-\delta}}{1-x_0}.$$

Or $z - \delta = (z-1)/2 > -1$, donc la fonction majorante a une intégrale convergente près de zéro. Sur tout segment à distance positive de zéro, les intégrandes sont continues. Le critère de comparaison montre donc la convergence absolue des deux intégrales

$$\int_0^{x_0} \frac{t^z \ln t}{1-t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{x_0} \frac{t^z (\ln t)^2}{1-t} dt.$$

Cela établit leur existence sans chercher leur valeur.

4. (a) Fixons $a > -1$, $z > a$ et $h \neq 0$ avec $z + h > a$. Pour $t \in]0, x_0]$, posons $s = h \ln t$.

Comme $t < 1$ et $h \neq 0$, on a $s \neq 0$.

Justifions la formule de reste par deux applications du théorème de Rolle. Posons $c = 2(e^s - 1 - s)/s^2$ et $Q(v) = e^v - 1 - v - cv^2/2$. Cette fonction est de classe C^2 sur le segment d'extrémités 0 et s , et $Q(0) = Q(s) = 0$. Rolle fournit un point ξ strictement entre ces extrémités avec $Q'(\xi) = 0$.

Comme $Q'(0) = 0$, une seconde application de Rolle à Q' entre 0 et ξ fournit η avec $Q''(\eta) = e^\eta - c = 0$. Le point η est strictement entre 0 et s , donc $\eta = \theta s$ pour un $\theta \in]0, 1[$. Ainsi $c = e^{\theta s}$, ce qui établit

$$e^s = 1 + s + \frac{s^2}{2} e^{\theta s}.$$

En remplaçant s par $h \ln t$, on obtient exactement $t^h - 1 - h \ln t = \frac{h^2}{2} (\ln t)^2 t^{h\theta}$.

Précisons le choix de θ pour pouvoir intégrer le reste. Puisque $s \neq 0$, la fonction $\theta \mapsto e^{\theta s}$ est injective. Le nombre fourni par Taylor est donc unique et s'écrit

$$\theta_h(t) = \frac{1}{s} \ln \left(\frac{2(e^s - 1 - s)}{s^2} \right), \quad s = h \ln t.$$

Le terme $e^s - 1 - s$ est strictement positif, comme le montre aussi le reste de Taylor. Cette formule définit une application continue sur $]0, x_0]$, et l'existence de Taylor assure $0 < \theta_h(t) < 1$.

Après multiplication par $t^z/(1-t)$ et division par h , l'identité ponctuelle devient

$$\frac{1}{h} \frac{t^{z+h} - t^z}{1-t} - \frac{t^z \ln t}{1-t} = \frac{h (\ln t)^2 t^{z+\theta_h(t)h}}{2(1-t)}.$$

Les intégrales des deux premiers termes existent absolument : $z, z + h > -1$ par hypothèse, et la question 3. s'applique au terme logarithmique. Pour le reste, $z + \theta_h(t)h$ est compris entre z et $z + h$, donc est supérieur à a . Comme $0 < t < 1$,

$$0 \leq \frac{(\ln t)^2 t^{z+\theta_h(t)h}}{1-t} \leq \frac{(\ln t)^2 t^a}{1-t}.$$

La fonction majorante a une intégrale convergente par 3., appliquée avec l'exposant $a > -1$. Le reste est continu pour $t > 0$ et son intégrale impropre converge par comparaison.

On peut donc intégrer l'identité sur $[\varepsilon, x_0]$ puis faire tendre ε vers zéro dans chacune des intégrales convergentes. Cela donne

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} - \int_0^{x_0} \frac{t^z \ln t}{1-t} dt = \frac{h}{2} \int_0^{x_0} \frac{(\ln t)^2 t^{z+\theta_h(t)h}}{1-t} dt.$$

L'existence d'une application intégrable dans le reste est ainsi justifiée, et pas seulement l'existence séparée d'un point de Taylor pour chaque t .

(b) Posons $C_a = \int_0^{x_0} \frac{(\ln t)^2 t^a}{1-t} dt$, un réel fini positif d'après 3. L'égalité et la comparaison de a) donnent

$$\left| \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - \int_0^{x_0} \frac{t^z \ln t}{1-t} dt \right| \leq \frac{|h|}{2} C_a.$$

Le réel a est fixé et $z > a$. Pour tout h assez petit en valeur absolue, la condition $z+h > a$ est satisfaite. Le membre droit tend alors vers zéro. Le quotient de différences admet donc une limite et

$$g'(z) = \int_0^{x_0} \frac{t^z \ln t}{1-t} dt.$$

Il s'agit d'une preuve directe de dérivabilité par contrôle du reste. Aucun théorème de dérivation sous le signe intégral n'est invoqué.

(c) Pour chaque $z > -1$, on peut choisir a tel que $-1 < a < z$, par exemple $a = (z-1)/2$. La question b) s'applique alors et montre que g est dérivable en ce point.

Ainsi g est dérivable sur tout son domaine $] -1, +\infty[$, avec la formule de b). Pour $z \leq -1$, l'intégrale définissant g ne converge pas ; il n'y a pas de point supplémentaire à étudier.

5. Pour $z > -1$, l'intégrande définissant g est positive, donc $g(z) > 0$. La formule de 4. donne $g'(z) < 0$, puisque $\ln t < 0$ sur $]0, x_0]$. La fonction est donc strictement

décroissante.

On peut aussi préciser la courbure sans dériver une nouvelle fois une intégrale. Si $z_2 > z_1 > -1$, alors $t^{z_2} < t^{z_1}$ et, après multiplication par $\ln t / (1 - t) < 0$,

$$\frac{t^{z_2} \ln t}{1 - t} > \frac{t^{z_1} \ln t}{1 - t}.$$

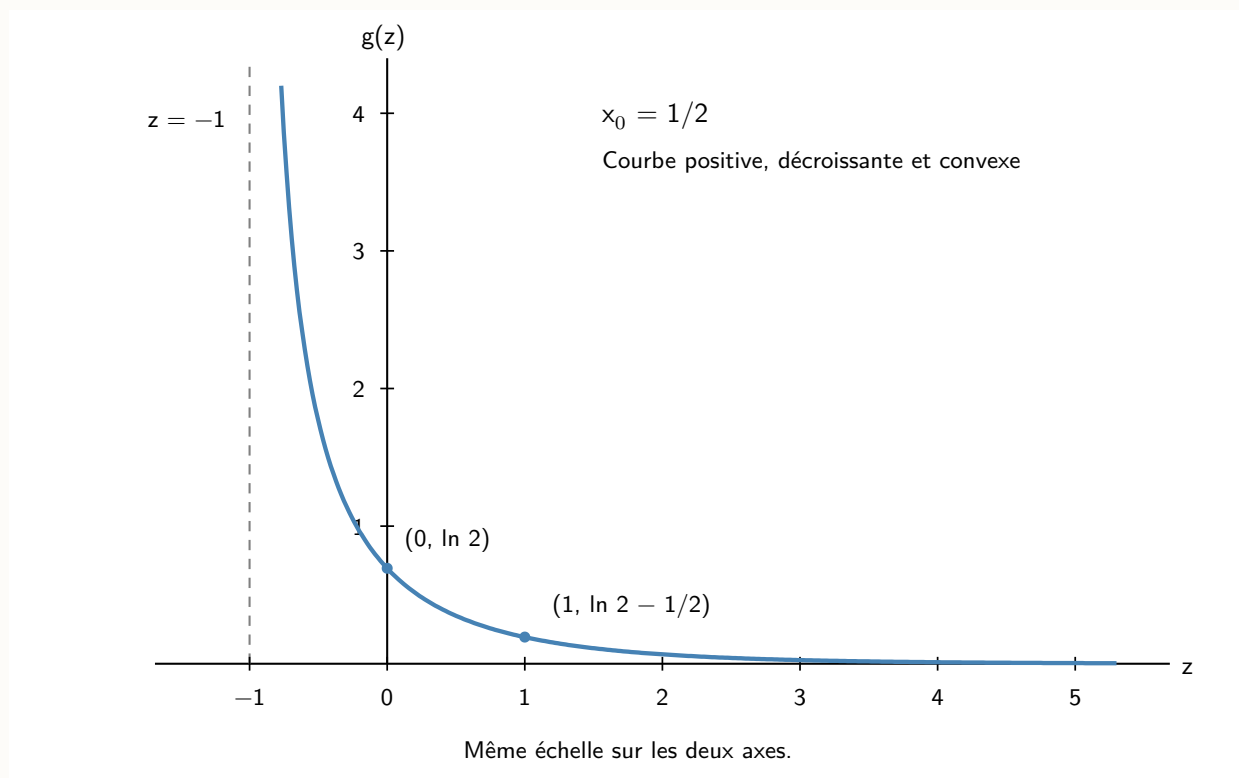
Les intégrales convergent absolument par 3. Leur différence est strictement positive, donc $g'(z_2) > g'(z_1)$. La dérivée est strictement croissante; la caractérisation de la convexité pour une fonction dérivable montre que g est strictement convexe.

D'après 2.(b), le graphe admet l'asymptote verticale $z = -1$ et l'asymptote horizontale $y = 0$ à droite. Il passe par les points

$$(0, -\ln(1 - x_0)), \quad (1, -\ln(1 - x_0) - x_0).$$

z	-1^+	$+\infty$
Signe de g'	—	—
Variation de g	$+\infty$	Décroît vers 0

Ces propriétés décrivent l'allure pour tout $x_0 \in]0, 1[$. Le dessin suivant illustre le choix $x_0 = 1/2$; les deux axes ont la même échelle, conformément à la demande de repère orthonormé. Dans cet exemple, $g(0) = \ln 2$ et $g(1) = \ln 2 - 1/2$.



Relevé des adaptations

- Préambule de I : explicitation de $P(X \geq t) > 0$ pour que la probabilité conditionnelle donnée soit définie ; cette condition était implicite dans la formulation originale.
- II.3.(a) : indication du changement de variable $t = u^s$ pour $\alpha = r/s$, conformément à la règle sur les changements de variable non affines.
- II.3.(b) : remplacement de la tangente hyperbolique par une expression équivalente en exponentielles, dans les outils du référentiel.