



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1980

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Introduction

On étudie la fonction y d'une variable réelle définie par

$$y(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2 + 1}.$$

Dans la première partie, on construit sa courbe représentative. Dans la deuxième partie, on résout certains problèmes relatifs à son intégration.

Première partie

1. (a) Étudier les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = x^3 - 2x^2 - 1.$$

1. (b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ a une et une seule racine réelle x_0 , et que $\frac{4}{3} < x_0$.

1. (c) Démontrer que l'on a plus précisément $2 < x_0 < 3$.

2. On construit par récurrence les suites réelles $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ en posant $x_1 = 1$ et $y_1 = 3$.

Pour $n > 1$, on pose $m_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$ et

$$\begin{cases} x_n = m_{n-1}, & y_n = y_{n-1} & \text{si } u(m_{n-1}) \leq 0, \\ x_n = x_{n-1}, & y_n = m_{n-1} & \text{si } u(m_{n-1}) > 0. \end{cases}$$

- (a) Calculer x_2 et y_2 , x_3 et y_3 , x_4 et y_4 .

2. (b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $x_n \leq x_0 \leq y_n$.
2. (c) Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.
2. (d) Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près.
3. (a) Quel est le domaine de définition de la fonction y citée dans l'introduction ?
3. (b) Calculer la dérivée $y'(x)$ et l'exprimer en fonction de $u(x)$.
3. (c) Dresser le tableau de variation de y .
4. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction y au voisinage de 0.
4. (b) Quelle est la tangente au point $(0, 0)$ de la courbe représentative de y ? Quelle est la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de $(0, 0)$?
5. Étudier les quatre branches infinies de la courbe représentative de y : existence d'asymptotes et position de la courbe par rapport à celles-ci.
6. Tracer la courbe représentative de la fonction y .

Partie II

1. On considère les fonctions rationnelles A et B définies par

$$A(t) = \frac{t^6 + t^4 - t^2 - 1}{t^3(t^2 - 2t - 1)}, \quad B(t) = \frac{6t^4 + 2t^3 - t^2 - 1}{t^3(t^2 - 2t - 1)}.$$

- (a) Déterminer le polynôme E obtenu comme quotient dans la division euclidienne du numérateur de A par son dénominateur. Ce polynôme est appelé la partie entière de A .

1. (b) Déterminer les valeurs réelles où A n'est pas définie. Factoriser son dénominateur et préciser les multiplicités des facteurs correspondants; vérifier qu'ils ne se simplifient pas avec le numérateur.

Proposer une forme d'écriture de $A - E$, puis de B , comme somme de fractions à numérateurs constants dont les dénominateurs sont les puissances des facteurs linéaires de leur dénominateur. Ne pas calculer ici les numérateurs de ces fractions. Les identités proposées seront établies à la question suivante par multiplication par le dénominateur et identification polynomiale.

1. (c) On cherche une identité pour B dans laquelle les fractions dont les dénominateurs sont des puissances de t ont pour somme

$$\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t}.$$

Déterminer les autres fractions de l'écriture proposée en (b) et vérifier l'identité obtenue. En déduire une identité analogue pour A .

1. (d) Déduire des calculs précédents une primitive C de A sur chacun des intervalles de son domaine de définition.
2. On veut déterminer, pour $x > 1$, une primitive de la fonction y citée dans l'introduction.

(a) Pour $a > 1$ fixé et $x > 1$, soit

$$I(x) = \int_a^x \frac{z}{z-1} \sqrt{z^2+1} \, dz.$$

Effectuer dans $I(x)$ le changement de variable

$$2z = t - \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

2. (b) Exprimer I en fonction de la primitive C définie en II.1(d).

3. L'intégrale $\int_1^2 y(x) dx$ est-elle convergente ? Pourquoi ?

4. On considère l'aire $J(m)$ de la région du plan définie par les inégalités

$$x_0 \leq x \leq m, \quad x + 1 \leq Y \leq y(x),$$

où $m \geq x_0$ et où x_0 est la racine définie en I.1(b). La lettre Y désigne ici l'ordonnée d'un point du plan.

(a) Représenter $J(m)$ par des hachures sur le graphique de la courbe de y .

4. (b) L'aire $J(m)$ a-t-elle une limite finie lorsque m tend vers $+\infty$?

4. (c) Calculer une valeur approchée de $J(4)$ en utilisant la valeur approchée de x_0 calculée en I.2(d).