



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1980

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel strictement positif et I l'intervalle $[-1, 1]$. On note $\mathbb{R}_r[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus r . Les dérivées aux extrémités de I sont entendues au sens unilatéral.

Partie I

Le cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur I . On définit les fonctions T_0 et T_n sur I par les relations

$$T_0(\cos \theta) = 1, \quad T_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi], \quad n \geq 1.$$

1. Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3 . Prouver que T_n est un polynôme en x de degré n et calculer le coefficient de x^n . On pourra poser $x = \cos \theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$.
2. Montrer que T_n admet exactement n racines réelles distinctes, toutes dans I . On les note $x_1, x_2, \dots, x_n$ en les classant par valeurs décroissantes. Expliciter x_j en fonction de l'angle $\frac{2j-1}{n}\pi$.
3. Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur I .
 3. (a) Montrer que, pour tout $f \in E$, l'intégrale $J(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ existe.
 3. (b) Calculer, à l'aide du changement de variable $x = \cos t$, les intégrales $J(1)$, $J(T_n^2)$ et $J(T_n T_m)$, avec $m \geq 0$ entier et $m \neq n$.
 3. (c) Vérifier rapidement que $T_0, T_1, \dots, T_n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que $J(T_n P) = 0$ si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Que vaut $J(T_n P)$ si P est de degré n ?

Partie II

On se donne dans cette partie n nombres réels distincts de $I : x_1, x_2, \dots, x_n$. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k},$$

et on note L'_j son polynôme dérivé. Le produit porte sur tous les indices de 1 à n sauf j ; un produit vide vaut 1.

1. Calculer $L_j(x_i)$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.

2. Soit $F : \mathbb{R}_{2n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ l'application définie par

$$F(P) = (P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n)).$$

La notation P' désigne le polynôme dérivé de P .

2. (a) Vérifier que F est linéaire.

2. (b) Montrer que le noyau de F est réduit au polynôme nul.

2. (c) En déduire que F est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Utiliser la question précédente pour prouver qu'il existe un et un seul polynôme de degré au plus $2n - 1$, noté $\tilde{f}$, tel que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\tilde{f}(x_j) = f(x_j), \quad \tilde{f}'(x_j) = f'(x_j).$$

4. Vérifier que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) L_j(x)^2 + \sum_{j=1}^n (f'(x_j) - 2f(x_j) L_j'(x_j)) (x - x_j) L_j(x)^2.$$

Partie III

Dans cette partie, f est une fonction numérique $2n$ fois dérivable sur I , et $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n points donnés distincts de I .

1. On suppose que f et sa dérivée f' s'annulent en chacun des x_i . On se donne $x \in I$, distinct des x_i , et on définit

$$\varphi(t) = f(t) - A(t - x_1)^2(t - x_2)^2 \cdots (t - x_n)^2,$$

où la constante réelle A est déterminée par la condition $\varphi(x) = 0$.

1. (a) Montrer, en utilisant le théorème de Rolle, que φ' s'annule en au moins $2n$ points distincts de I .

1. (b) En déduire que, pour $1 \leq p \leq 2n$, la dérivée $\varphi^{(p)}$ s'annule en au moins $2n - p + 1$ points distincts de I .

1. (c) En déduire qu'il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}.$$

1. (d) Est-ce encore vrai lorsque $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$?

2. On ne suppose plus que f et f' s'annulent nécessairement en $x_1, \dots, x_n$, et on adopte la notation $\tilde{f}$ de II.3. Montrer que

$$(1) \quad \forall x \in I, \exists c \in I, \quad f(x) = \tilde{f}(x) + (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}.$$

Partie IV

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $2n$ fois continûment dérivable sur I . Les points $x_1, \dots, x_n$ sont désormais les n racines de T_n . Pour chaque $x \in I$, on choisit un $c \in I$ satisfaisant l'égalité (1) de III.2.

1. Montrer que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\int_{-1}^1 \frac{(x - x_j)L_j(x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 0.$$

On pourra utiliser I.3 (c).

2. On pose $a_j = J(L_j^2)$. Montrer, à l'aide des parties II et III, qu'il existe $d \in I$ tel que

$$J(f) = \sum_{j=1}^n a_j f(x_j) + \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(d)}{(2n)!}.$$

3. La somme

$$\sum_{j=1}^n a_j f(x_j),$$

notée $\tilde{J}(f)$, est une valeur approchée de $J(f)$. Montrer que $\tilde{J}(f) = J(f)$ si f est un polynôme de degré au plus $2n - 1$.

On peut démontrer, ce qui n'est pas demandé, que les coefficients $a_1, \dots, a_n$ sont tous égaux à π/n .