



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC / ESCP

Mathématiques 2

1980

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Première partie

1. (a)

La fonction polynomiale u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$u'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4).$$

Cette dérivée est positive pour $x < 0$ et pour $x > \frac{4}{3}$, négative pour $0 < x < \frac{4}{3}$, et nulle en 0 et en $\frac{4}{3}$. Les valeurs aux points critiques sont

$$u(0) = -1, \quad u\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27} - \frac{32}{9} - 1 = -\frac{59}{27}.$$

Le terme dominant x^3 donne les limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Le tableau de variation est donc

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow -1$	$\searrow -\frac{59}{27}$	$\nearrow +\infty$

1. (b)

D'après le tableau, u est strictement négative sur $] -\infty, \frac{4}{3}]$. Elle n'y possède donc aucune racine.

Sur $[\frac{4}{3}, +\infty[$, elle est continue, strictement croissante, part d'une valeur strictement négative et tend vers $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une racine sur cet intervalle ; la stricte croissance donne son unicité. Comme $u(\frac{4}{3}) < 0$, cette racine x_0 vérifie

$$x_0 > \frac{4}{3}.$$

En particulier, $u(x) < 0$ pour $x < x_0$ et $u(x) > 0$ pour $x > x_0$. Cette propriété de signe sera utilisée dans la dichotomie.

1. (c)

On calcule $u(2) = 8 - 8 - 1 = -1$ et $u(3) = 27 - 18 - 1 = 8$. La continuité fournit une racine dans $]2, 3[$. Puisque la racine réelle est unique,

$$2 < x_0 < 3.$$

2. (a)

À chaque étape, on calcule le milieu de l'intervalle précédent et on conserve la moitié qui contient la racine.

Pour $n = 2$, le milieu vaut 2 et $u(2) = -1 \leq 0$. Donc $x_2 = 2, y_2 = 3$.

Pour $n = 3$, le milieu vaut $\frac{5}{2}$ et

$$u\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - \frac{100}{8} - \frac{8}{8} = \frac{17}{8} > 0.$$

Donc $x_3 = 2, y_3 = \frac{5}{2}$.

Pour $n = 4$, le milieu vaut $\frac{9}{4}$ et

$$u\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{729}{64} - \frac{648}{64} - \frac{64}{64} = \frac{17}{64} > 0.$$

Ainsi

$$(x_2, y_2) = (2, 3), \quad (x_3, y_3) = \left(2, \frac{5}{2}\right), \quad (x_4, y_4) = \left(2, \frac{9}{4}\right).$$

2. (b)

On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. L'initialisation découle de $1 < 2 < x_0 < 3$.

Supposons $x_{n-1} \leq x_0 \leq y_{n-1}$ et posons $m = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$.

Si $u(m) \leq 0$, la propriété de signe de I.1(b) donne $m \leq x_0$. Les nouvelles bornes sont $x_n = m$, $y_n = y_{n-1}$, et elles encadrent x_0 .

Si $u(m) > 0$, on a $m > x_0$. Les nouvelles bornes sont $x_n = x_{n-1}$, $y_n = m$, et elles encadrent également x_0 .

La récurrence est établie : pour tout $n \geq 1$,

$$x_n \leq x_0 \leq y_n.$$

2. (c)

Comme le milieu est compris entre les deux anciennes bornes, la définition entraîne, dans les deux cas,

$$x_{n-1} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1}.$$

Ainsi (x_n) est croissante et (y_n) décroissante. Dans chaque cas, la longueur de l'intervalle est divisée par 2 :

$$y_n - x_n = \frac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}).$$

Comme $y_1 - x_1 = 2$, on obtient

$$y_n - x_n = \frac{2}{2^{n-1}} = 2^{2-n} \longrightarrow 0.$$

Les suites sont donc adjacentes. Elles convergent vers une même limite ; l'encadrement de I.2(b) impose que cette limite soit x_0 .

2. (d)

L'intervalle obtenu au rang 4 ne suffit pas, à lui seul, à garantir l'erreur souhaitée pour l'approximation 2, 2. On effectue une étape supplémentaire.

Le milieu de $[2, \frac{9}{4}]$ est $\frac{17}{8} = 2,125$ et

$$u\left(\frac{17}{8}\right) = \frac{4913 - 4624 - 512}{512} = -\frac{223}{512} < 0.$$

Ainsi $x_5 = 2,125$ et $y_5 = 2,25$. La valeur 2, 2 appartient à cet intervalle et

$$|x_0 - 2,2| \leq \max(2,2 - 2,125; 2,25 - 2,2) = 0,075 < 0,1.$$

Une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près est donc 2, 2.

3. (a)

Le radical $\sqrt{x^2 + 1}$ est défini et strictement positif pour tout réel x . La seule restriction provient du dénominateur $x - 1$. Ainsi

$$D_y = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

3. (b)

Sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, les facteurs sont dérivables et

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

La dérivation du produit donne

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^2} + \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

En réduisant au même dénominateur,

$$y'(x) = \frac{-(x^2+1) + x^2(x-1)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{u(x)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}.$$

3. (c)

Le dénominateur de y' est strictement positif sur D_y . Le signe de y' est donc celui de u : il est négatif pour $x < x_0$, avec $x \neq 1$, nul en x_0 et positif pour $x > x_0$.

Lorsque $x \rightarrow 1$, le numérateur $x\sqrt{x^2+1}$ tend vers $\sqrt{2} > 0$. Donc $y(x) \rightarrow -\infty$ en 1^- et $y(x) \rightarrow +\infty$ en 1^+ .

En $-\infty$ et en $+\infty$, le quotient $x/(x-1)$ tend vers 1 et le radical tend vers $+\infty$, donc $y(x) \rightarrow +\infty$ aux deux extrémités.

Intervalle	Variation de y	Valeurs aux extrémités
$] -\infty, 1[$	strictement décroissante	$+\infty \searrow -\infty$
$]1, x_0]$	strictement décroissante	$+\infty \searrow y(x_0)$
$[x_0, +\infty[$	strictement croissante	$y(x_0) \nearrow +\infty$

Le point d'abscisse x_0 est le minimum de la branche située à droite de 1. On a $y(0) = 0$. À titre de repère pour le dessin, une dichotomie affinée donne $x_0 \simeq 2,20557$ et $y(x_0) \simeq 4,43042$.

4. (a)

Pour éviter toute composition de développements limités, on établit directement celui du radical. On a

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

car le dénominateur tend vers 2. Ainsi $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

D'autre part, l'identité géométrique ou le développement usuel donne

$$\frac{x}{x-1} = -\frac{x}{1-x} = -x - x^2 + o(x^2).$$

Le produit des deux développements conduit à

$$y(x) = (-x - x^2 + o(x^2)) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = -x - x^2 + o(x^2).$$

4. (b)

La tangente en l'origine a pour équation $Y = y(0) + y'(0)x$. Comme $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$, son équation est

$$Y = -x.$$

Pour la position relative, le développement précédent donne

$$y(x) + x = -x^2 + o(x^2).$$

Pour $x \neq 0$ suffisamment proche de 0, le quotient $(y(x) + x)/x^2$ est strictement négatif, puisqu'il tend vers -1 . La courbe est donc strictement au-dessous de sa tangente de part et d'autre de l'origine, dans un voisinage de ce point.

5.

Les quatre branches infinies correspondent à $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 1^-$, $x \rightarrow 1^+$ et $x \rightarrow +\infty$.

Au voisinage de 1.

On a établi $y(x) \rightarrow -\infty$ en 1^- et $y(x) \rightarrow +\infty$ en 1^+ . La droite $x = 1$ est donc une asymptote verticale pour les deux branches. La première est située à gauche de cette droite, la seconde à droite.

En $+\infty$.

Pour $x > 1$, on utilise l'identité $\sqrt{x^2 + 1} - x = 1/(\sqrt{x^2 + 1} + x)$:

$$y(x) - (x + 1) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}}{x - 1}.$$

Le numérateur tend vers $\frac{3}{2}$ et le dénominateur vers $+\infty$. Ainsi $y(x) - (x + 1) \rightarrow 0$; la droite $Y = x + 1$ est asymptote en $+\infty$.

Pour tout $x > 1$, le numérateur et le dénominateur de cette différence sont strictement positifs. La courbe est donc au-dessus de cette asymptote sur tout $]1, +\infty[$. On retient aussi l'équivalent

$$y(x) - (x + 1) \sim \frac{3}{2x} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

En $-\infty$.

Pour $x < 0$, on utilise $\sqrt{x^2 + 1} + x = 1/(\sqrt{x^2 + 1} - x)$. On obtient

$$y(x) - (-x - 1) = \frac{x\sqrt{x^2 + 1} + x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} - 1}{x - 1}.$$

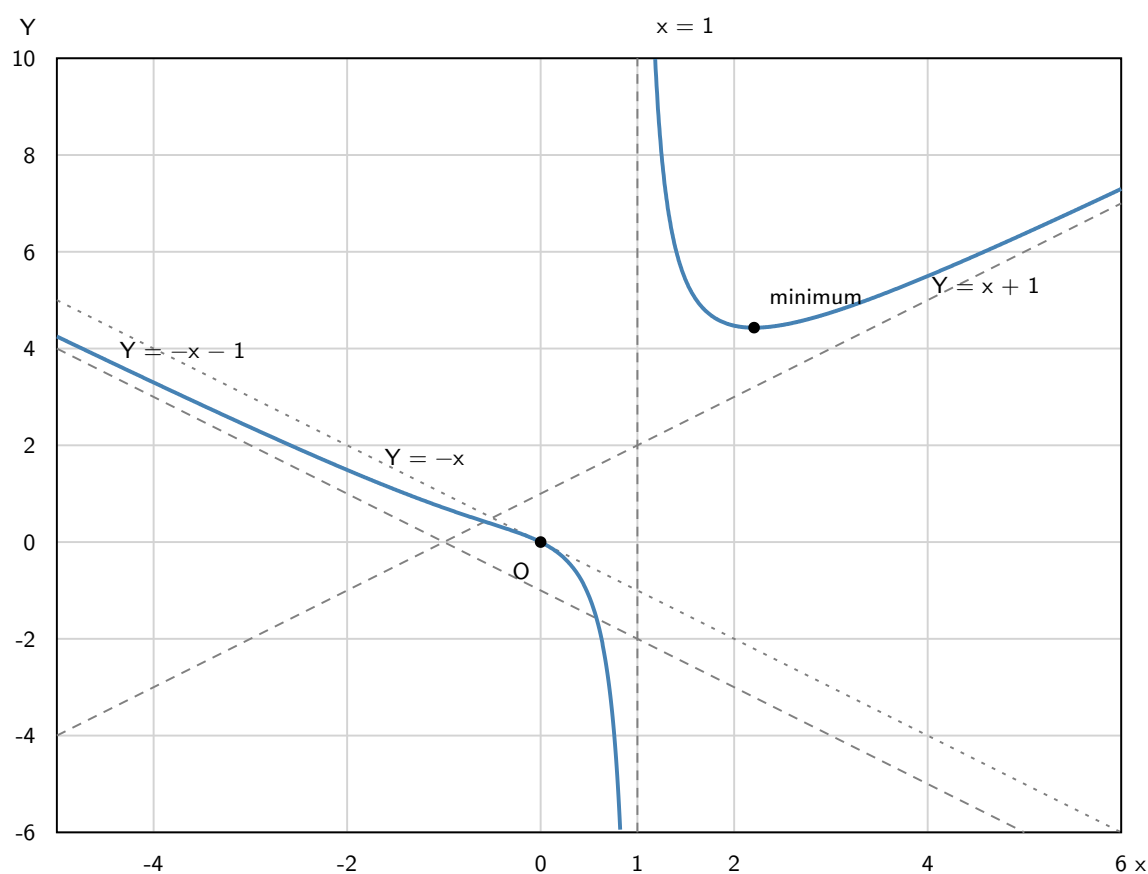
Le numérateur tend vers $-\frac{3}{2}$, tandis que le dénominateur tend vers $-\infty$. La différence tend vers 0, donc la droite $Y = -x - 1$ est asymptote en $-\infty$.

Pour $x < 0$, le numérateur et le dénominateur de cette différence sont négatifs; leur quotient est positif. La courbe est au-dessus de cette asymptote sur $] -\infty, 0[$.

6.

Le tracé utilise les variations, les trois droites asymptotes et la tangente en l'origine. Il comporte deux branches séparées par $x = 1$: la branche de gauche décroît et passe par $(0, 0)$; celle de droite descend jusqu'à son minimum, puis remonte en restant au-dessus de $Y = x + 1$.

La courbe du graphique suivant est calculée à partir de la formule exacte de y . Les pointillés gris représentent les asymptotes obliques et la tangente en l'origine; la droite verticale en pointillés est $x = 1$.



Partie II

1. (a)

La partie entière s'obtient par division euclidienne des polynômes. Le dénominateur développé vaut $t^5 - 2t^4 - t^3$. On vérifie

$$(t + 2)(t^5 - 2t^4 - t^3) = t^6 - 5t^4 - 2t^3.$$

Par conséquent,

$$t^6 + t^4 - t^2 - 1 = (t + 2)(t^5 - 2t^4 - t^3) + (6t^4 + 2t^3 - t^2 - 1).$$

Le reste est de degré 4, strictement inférieur au degré 5 du dénominateur. Le quotient est donc $E(t) = t + 2$, et

$$A(t) = t + 2 + B(t)$$

sur leur domaine commun.

1. (b)

Cette question est traitée comme une recherche d'identité rationnelle réelle, sans utiliser de théorème général de décomposition.

Posons $p = 1 + \sqrt{2}$ et $q = 1 - \sqrt{2}$. Alors

$$t^2 - 2t - 1 = (t - p)(t - q), \quad t^3(t^2 - 2t - 1) = t^3(t - p)(t - q).$$

Les trois nombres $0, p, q$ sont distincts. Le facteur t a multiplicité 3 ; les facteurs $t - p$ et $t - q$ ont multiplicité 1.

Le numérateur de A se factorise en

$$t^6 + t^4 - t^2 - 1 = (t^2 - 1)(t^2 + 1)^2.$$

Il vaut -1 en 0 . En p et en q , il ne s'annule pas : ces nombres ne valent ni 1 ni -1 , et $t^2 + 1 > 0$ pour tout réel t . Aucun des trois facteurs du dénominateur ne se simplifie. Les valeurs exclues du domaine de A sont exactement $0, p, q$.

Une forme à rechercher est

$$A(t) = t + 2 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \frac{b}{t-p} + \frac{c}{t-q}.$$

Comme $A - (t + 2) = B$, la forme correspondante pour B est

$$B(t) = \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \frac{b}{t-p} + \frac{c}{t-q}.$$

Les constantes restent à déterminer. Ces formes sont des identités candidates ; la question (c) en établit l'existence en calculant leurs coefficients et en vérifiant l'égalité après réduction au même dénominateur. On ne suppose donc aucun résultat général sur les fractions rationnelles.

1. (c)

La somme donnée des trois premières fractions est

$$\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t} = \frac{1 - 2t + 6t^2}{t^3}.$$

Pour calculer le reste, on développe

$$(1 - 2t + 6t^2)(t^2 - 2t - 1) = 6t^4 - 14t^3 - t^2 - 1.$$

La différence avec le numérateur de B vaut $16t^3$. Ainsi, pour $t \notin \{0, p, q\}$,

$$B(t) - \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t} \right) = \frac{16}{(t-p)(t-q)}.$$

Cherchons b, c tels que $16/((t-p)(t-q)) = b/(t-p) + c/(t-q)$. La multiplication par $(t-p)(t-q)$ conduit à l'identité

$$16 = b(t-q) + c(t-p).$$

En évaluant en p , on obtient $b = 16/(p-q) = 4\sqrt{2}$. En évaluant en q , on obtient $c = 16/(q-p) = -4\sqrt{2}$. Ces valeurs vérifient bien l'identité : leur somme est nulle et le terme constant vaut $4\sqrt{2}(p-q) = 16$.

La décomposition cherchée est donc

$$B(t) = \frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t} + \frac{4\sqrt{2}}{t-p} - \frac{4\sqrt{2}}{t-q}.$$

En utilisant (a),

$$A(t) = t + 2 + \frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t} + \frac{4\sqrt{2}}{t-p} - \frac{4\sqrt{2}}{t-q}.$$

Toutes ces égalités ont été établies par des opérations polynomiales réelles.

1. (d)

On intègre chaque terme sur un intervalle ne contenant aucun des trois nombres $0, p, q$.

La dérivée de $\ln |t-r|$ y vaut $1/(t-r)$. Une primitive est donc

$$C(t) = \frac{t^2}{2} + 2t - \frac{1}{2t^2} + \frac{2}{t} + 6 \ln |t| + 4\sqrt{2} \ln |t-p| - 4\sqrt{2} \ln |t-q|.$$

On peut aussi écrire le dernier groupe de termes sous la forme

$$4\sqrt{2} \ln \left| \frac{t-p}{t-q} \right|.$$

La dérivation de l'expression donne exactement $A(t)$. La constante d'intégration peut être choisie indépendamment sur chacun des intervalles $] -\infty, q[$, $]q, 0[$, $]0, p[$ et $]p, +\infty[$.

2. (a)

Pour $a > 1$ fixé, la fonction intégrée est continue sur $]1, +\infty[$. L'intégrale de a à x est donc bien définie pour tout $x > 1$, avec l'orientation habituelle si $x < a$.

Posons $z = \varphi(t) = \frac{1}{2}(t - 1/t)$ pour $t > 0$. Cette fonction est de classe C^1 et

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) > 0.$$

Elle est strictement croissante, tend vers $-\infty$ en 0^+ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Elle est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. La solution positive de $t^2 - 2zt - 1 = 0$ est

$$t = T(z) = z + \sqrt{z^2 + 1}.$$

Comme $\varphi(p) = 1$, la condition $z > 1$ équivaut à $t > p$. L'intégration reste donc dans un intervalle où A et C sont définies.

Les formules de transformation sont

$$\sqrt{z^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad \frac{z}{z-1} = \frac{t^2 - 1}{t^2 - 2t - 1}, \quad dz = \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt.$$

L'expression du radical est positive puisque $t > 0$, et son carré est $z^2 + 1$. Le produit devient

$$\frac{z}{z-1} \sqrt{z^2+1} \, dz = \frac{(t^2-1)(t^2+1)^2}{4t^3(t^2-2t-1)} \, dt = \frac{1}{4} A(t) \, dt.$$

En transformant aussi les bornes, on obtient

$$I(x) = \frac{1}{4} \int_{T(a)}^{T(x)} A(t) \, dt.$$

2. (b)

Les deux bornes et tout l'intervalle qui les relie appartiennent à $]p, +\infty[$. La formule de la primitive donne donc

$$I(x) = \frac{1}{4} \left[C \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) - C \left(a + \sqrt{a^2+1} \right) \right].$$

En particulier, la fonction

$$F(x) = \frac{1}{4} C \left(x + \sqrt{x^2+1} \right)$$

est une primitive de y sur $]1, +\infty[$. Ici les logarithmes de t , $t-p$ et $t-q$ portent tous sur des nombres strictement positifs.

3.

Méthode 1 — Équivalent au voisinage de la borne impropre.

Pour $x > 1$, la fonction y est positive et

$$(x-1)y(x) = x\sqrt{x^2+1} \longrightarrow \sqrt{2} \quad (x \rightarrow 1^+).$$

Ainsi $y(x) \sim \sqrt{2}/(x-1)$. Or $\int_1^2 dx/(x-1)$ diverge : pour $\varepsilon > 0$,

$$\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} = -\ln \varepsilon \rightarrow +\infty.$$

Par comparaison par équivalence de fonctions positives, l'intégrale de y diverge vers $+\infty$.

Méthode 2 — Minoration directe.

Pour $1 < x \leq 2$, on a $x \geq 1$ et $\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{2}$. Donc

$$y(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{x-1}.$$

Pour chaque $\varepsilon \in]0, 1[$, la croissance de l'intégrale sur le segment $[1+\varepsilon, 2]$ donne

$$\int_{1+\varepsilon}^2 y(x) dx \geq -\sqrt{2} \ln \varepsilon \rightarrow +\infty.$$

L'intégrale est donc divergente. La première méthode identifie le comportement local précis ; la seconde suffit à conclure grâce à une inégalité explicite.

4. (a)

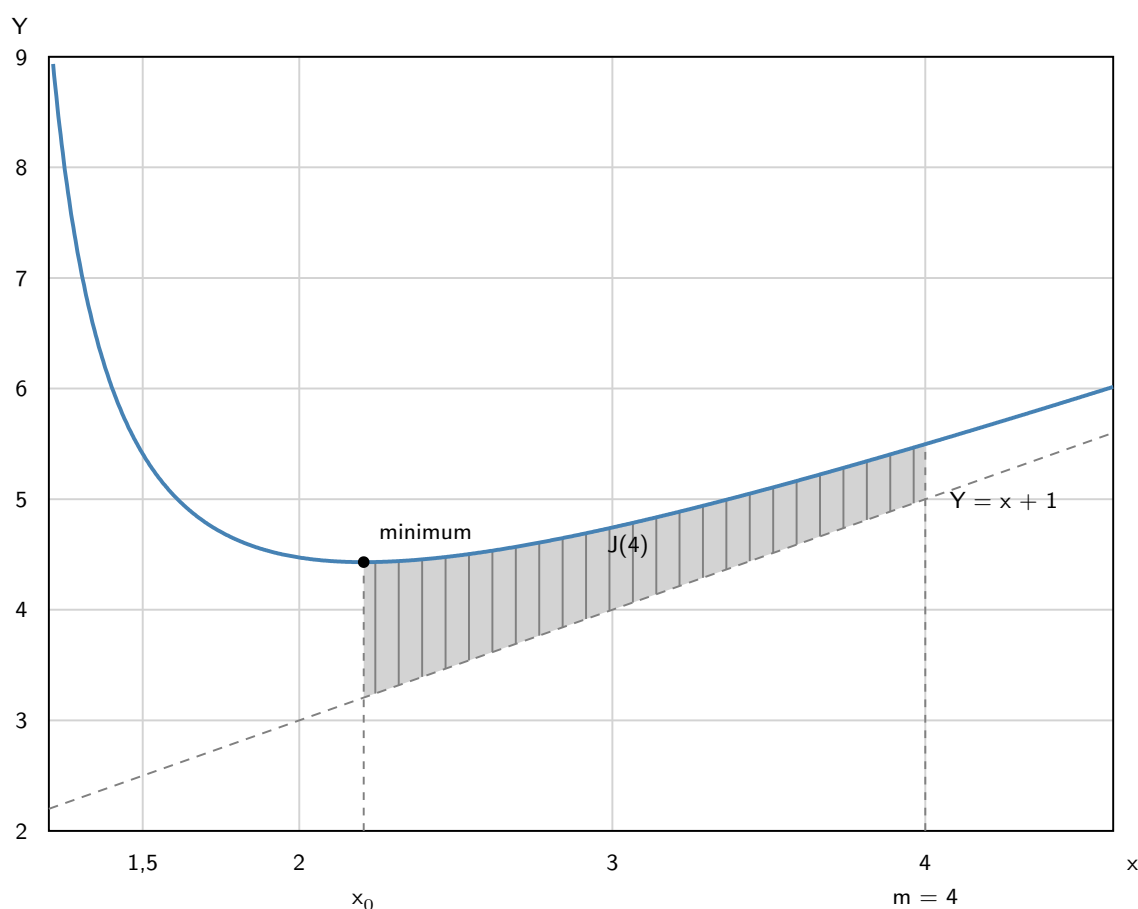
Pour tout $x > 1$, la question I.5 a établi $y(x) > x+1$. Comme $x_0 > 2$, la région indiquée est bien comprise entre la droite $Y = x+1$ et la courbe $Y = y(x)$, de l'abscisse x_0 à l'abscisse m .

Pour $m > x_0$, son aire est

$$J(m) = \int_{x_0}^m (y(x) - x - 1) dx.$$

Pour $m = x_0$, la région a une largeur nulle et $J(x_0) = 0$.

Le graphique suivant montre les hachures pour l'exemple $m = 4$. Pour une autre valeur de m , seule la borne verticale de droite se déplace.



4. (b)

Posons $g(x) = y(x) - x - 1$. D'après I.5, pour $x > 1$,

$$g(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}}{x - 1} > 0, \quad g(x) \sim \frac{3}{2x} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

L'intégrale de $1/x$ diverge en $+\infty$. La comparaison par équivalence de fonctions positives montre donc que $\int_{x_0}^{+\infty} g(x) dx$ diverge vers $+\infty$. Par conséquent,

$$J(m) \longrightarrow +\infty \quad (m \rightarrow +\infty).$$

L'aire n'a pas de limite finie. On peut également conclure directement à partir de $g(x) \geq 1/(x-1)$ pour $x > 1$, dont l'intégrale diverge. Le fait que la distance verticale entre la courbe et son asymptote tende vers 0 n'implique donc pas que l'aire entre elles soit finie.

4. (c)

On utilise la primitive obtenue en II.2. Une primitive de g sur $]1, +\infty[$ est

$$H(x) = \frac{1}{4}C\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - \frac{x^2}{2} - x.$$

Ainsi l'aire exacte vaut $J(4) = H(4) - H(x_0)$. En utilisant $x_0 \simeq 2,2$ obtenu en I.2(d), on calcule

$$J(4) \simeq H(4) - H(2,2).$$

Les arguments de C sont

$$T(4) = 4 + \sqrt{17} \simeq 8,123105626, \quad T(2,2) = 2,2 + \sqrt{5,84} \simeq 4,616609195.$$

L'expression numérique à évaluer est donc

$$\frac{1}{4}\left[C(8,123105626) - C(4,616609195)\right] - \left(\frac{16 - 4,84}{2} + 4 - 2,2\right).$$

Le terme entre parenthèses vaut 7,38. L'évaluation donne

$$H(4) - H(2, 2) \simeq 1,361098818.$$

L'approximation obtenue avec la valeur demandée de x_0 est donc $J(4) \simeq 1,36$ unité d'aire. Cette écriture ne garantit pas une erreur inférieure à 10^{-2} : l'erreur sur la borne x_0 doit aussi être prise en compte.

Pour préciser la portée de l'approximation, on sait $x_0 \in [2,125; 2,25]$ et $|x_0 - 2,2| \leq 0,075$. Sur cet intervalle, g est positive et décroissante. En effet, en posant $s = \sqrt{x^2 + 1}$ et $h = x/(s + x)$, on a

$$h'(x) = \frac{1}{s(s+x)^2}, \quad g'(x) = \frac{(x-1)h'(x) - (1+h(x))}{(x-1)^2}.$$

Pour $x \geq 2$, $s \geq x$ et $s + x \geq 2x$, donc $(x-1)h'(x) \leq (x-1)/(4x^3) < 1 < 1 + h(x)$. Ainsi $g'(x) < 0$. Il s'ensuit que $g(x) \leq g(2) = 2\sqrt{5} - 3 < 1,5$ sur l'intervalle considéré. L'erreur due au remplacement de la borne est donc majorée par

$$|J(4) - (H(4) - H(2, 2))| \leq 0,075 \times 1,5 = 0,1125.$$

Une dichotomie plus poussée, suivie de la même évaluation de primitive, donne $x_0 \simeq 2,205569430$ et $J(4) \simeq 1,354261516$. Cette valeur affinée est compatible avec l'approximation précédente ; elle utilise une précision sur x_0 supérieure à celle exigée en I.2(d).

Relevé des adaptations

I.4(a) : le développement du radical est établi par une identité exacte, sans utiliser la composition des développements limités. L'énoncé est conservé.

II.1(a) : la « partie entière » est définie comme le quotient de la division euclidienne des polynômes, outil du programme.

II.1(b) : la terminologie des pôles est remplacée par les valeurs exclues du domaine et les multiplicités des facteurs du dénominateur. La demande de décomposition est reformulée comme une recherche d'identité rationnelle réelle vérifiée par multiplication et identification polynomiale.

II.1(c) : la donnée sur les fractions en puissances de t est conservée et utilisée pour construire puis vérifier l'identité, sans invoquer un théorème général de décomposition en éléments simples.

II.1(d) : le domaine de validité d'une primitive est précisé intervalle par intervalle, car le domaine de A est non connexe.

II.4 : l'ordonnée d'un point est notée Y pour la distinguer de la fonction y . Les inégalités définissant la région restent inchangées.