



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1980

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

On conserve $n \geq 1$ et $I = [-1, 1]$. L'intégrale J est une intégrale impropre aux deux extrémités ; sa convergence sera justifiée avant son utilisation. Les dérivées aux extrémités de I , lorsqu'elles interviennent, sont unilatérales.

Partie I

1. Expressions des premiers polynômes et degré de T_n .

Question adaptée au programme actuel. La définition avec une fonction trigonométrique réciproque est remplacée par la relation $T_n(\cos \theta) = 2^{1-n} \cos(n\theta)$ sur $[0, \pi]$.

Cette relation définit bien une fonction sur I . En effet, le cosinus est continu sur $[0, \pi]$, de valeurs 1 et -1 aux extrémités. Sa dérivée est $-\sin \theta < 0$ sur $]0, \pi[$; il est donc strictement décroissant. Le théorème de la bijection donne une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Chaque $x \in I$ a ainsi une unique écriture $x = \cos \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$.

On utilise les formules d'addition pour établir une récurrence polynomiale. Pour tout entier $r \geq 1$,

$$\cos((r+1)\theta) + \cos((r-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(r\theta).$$

L'identité résulte de l'addition des formules du cosinus pour $r\theta + \theta$ et $r\theta - \theta$, dont les termes en sinus s'annulent. Posons $C_r(\cos \theta) = \cos(r\theta)$ et $C_0 = 1$. On a $C_1(x) = x$, puis

$$C_{r+1}(x) = 2xC_r(x) - C_{r-1}(x).$$

Cette relation prouve par récurrence que chaque C_r est la restriction à I d'un polynôme. Elle donne

$$C_2(x) = 2x^2 - 1, \quad C_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Puisque $T_r = 2^{1-r}C_r$ pour $r \geq 1$, on obtient

$$T_1(x) = x, \quad T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}, \quad T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x.$$

Pour le degré et le coefficient dominant, C_1 est de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$, et C_2 est de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^1$. Si, pour un entier $r \geq 2$, C_r a degré r et coefficient dominant 2^{r-1} , tandis que C_{r-1} a degré $r-1$, alors $2xC_r - C_{r-1}$ a

degré $r + 1$ et coefficient dominant 2^r . Le terme de degré $r + 1$ ne peut être annulé par le second polynôme, dont le degré est inférieur.

La récurrence donne donc, pour tout $n \geq 1$, $\deg C_n = n$ et un coefficient dominant 2^{n-1} . Ainsi T_n est de degré n et le coefficient de x^n vaut 1. C'est un polynôme unitaire. On emploie désormais T_n pour ce polynôme et pour sa restriction à I .

2. Racines de T_n .

Pour $x = \cos \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$, le facteur 2^{1-n} est non nul, donc $T_n(x) = 0$ équivaut à $\cos(n\theta) = 0$. Les zéros du cosinus sont les angles $\pi/2 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $0 \leq n\theta \leq n\pi$, les seules possibilités sont $k = 0, \dots, n-1$. On obtient les n angles

$$\theta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

et les racines correspondantes

$$x_j = \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2n} \right).$$

L'argument du cosinus est la moitié de l'angle $((2j-1)/n)\pi$ mentionné dans la question. Tous les θ_j appartiennent à $]0, \pi[$ et sont strictement croissants; le cosinus étant strictement décroissant sur cet intervalle, $1 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > -1$.

Les racines sont donc réelles, distinctes et strictement à l'intérieur de I . Un polynôme de degré n ne peut avoir plus de n racines distinctes : les racines trouvées sont toutes ses racines, même si l'on considère le polynôme sur tout $\mathbb{R}$. Pour $n = 1$, on retrouve l'unique racine $x_1 = 0$ de $T_1(x) = x$.

3. (a) Existence de l'intégrale pondérée.

Méthode 1 — Comparer aux singularités de type puissance.

Fixons $f \in E$. La fonction f est continue sur le segment I , donc elle y est bornée : il existe $B \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq B$ pour tout $x \in I$.

L'intégrande est continue sur $] -1, 1[$. On contrôle les deux extrémités séparément. Pour $0 \leq x < 1$, $1+x \geq 1$, donc

$$\frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{B}{\sqrt{1-x}}.$$

L'intégrale de $1/\sqrt{1-x}$ sur $[0, 1[$ converge et vaut 2, comme on le voit en intégrant sur $[0, r]$, puis en faisant tendre r vers 1.

Pour $-1 < x \leq 0$, $1-x \geq 1$, donc $|f(x)|/\sqrt{1-x^2} \leq B/\sqrt{1+x}$. Cette dernière fonction possède aussi une intégrale convergente de valeur 2 sur $] -1, 0]$.

Par comparaison de fonctions positives, les deux intégrales de la valeur absolue de l'intégrande convergent. Ainsi $J(f)$ existe et est absolument convergente. La linéarité de J pour les combinaisons finies de fonctions continues est alors justifiée par la linéarité sur les segments et par les passages aux limites des deux intégrales impropres convergentes.

Méthode 2 — Transformer les deux intégrales aux extrémités.

On utilise le changement de variable $x = \cos t$ indiqué pour la question suivante, en l'effectuant d'abord sur des segments intérieurs. Pour $0 < \varepsilon < \pi/2$, le cosinus est de classe C^1 et sa dérivée ne s'annule pas sur les deux segments angulaires utilisés. Comme $\sin t > 0$ à l'intérieur de $[0, \pi]$, le facteur du changement de variable simplifie le dénominateur et donne

$$\int_0^{\cos \varepsilon} \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} |f(\cos t)| dt,$$

$$\int_{-\cos \varepsilon}^0 \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\pi/2}^{\pi-\varepsilon} |f(\cos t)| dt.$$

La composée $t \mapsto |f(\cos t)|$ est continue et bornée sur $[0, \pi]$. Les membres de droite ont donc des limites finies quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$: les petits segments angulaires retirés contribuent au plus $B\varepsilon$ chacun. Les membres de gauche tendent, par définition, vers les deux intégrales impropres de la valeur absolue. Celles-ci convergent donc, et $J(f)$ est absolument convergente.

La première méthode compare directement le poids à des fonctions de référence. La seconde élimine les singularités au moyen du changement de variable trigonométrique.

3. (b) Changement de variable et orthogonalité.

On commence par justifier le changement de variable dans l'intégrale impropre. Pour $0 < \varepsilon < \pi/2$, l'application $t \mapsto \cos t$ est de classe C^1 et strictement décroissante sur $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, où $\sin t > 0$. Sur ce segment, $\sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t$ et $dx = -\sin t dt$. Le changement de variable sur un segment donne donc

$$\int_{-\cos \varepsilon}^{\cos \varepsilon} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(\cos t) dt.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, le membre de gauche tend vers $J(f)$, puisque les deux intégrales impropres ont été établies absolument convergentes en 3 (a). Le membre de droite tend vers $\int_0^\pi f(\cos t) dt$: la fonction composée est continue et bornée par B sur $[0, \pi]$, et la valeur absolue des deux morceaux retirés est au plus $2B\varepsilon$, qui tend vers 0.

On a donc démontré, pour toute fonction continue sur I ,

$$J(f) = \int_0^\pi f(\cos t) dt.$$

En particulier, $J(1) = \pi$. Pour tout entier non nul k , $\int_0^\pi \cos(kt) dt = [\sin(kt)/k]_0^\pi = 0$.

Pour $n \geq 1$, la définition de T_n donne

$$J(T_n^2) = 2^{2-2n} \int_0^\pi \cos^2(nt) dt.$$

Les formules d'addition donnent $\cos(2s) = \cos^2 s - \sin^2 s = 2\cos^2 s - 1$, donc $\cos^2 s = (1 + \cos(2s))/2$. L'intégrale du carré vaut ainsi $\pi/2$, et

$$J(T_n^2) = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

Si $m \geq 1$ et $m \neq n$, l'addition des formules du cosinus pour la somme et la différence des

angles donne

$$\cos(nt) \cos(mt) = \frac{1}{2}(\cos((n-m)t) + \cos((n+m)t)).$$

Les deux fréquences entières sont non nulles. Leurs intégrales sur $[0, \pi]$ sont donc nulles, et $J(T_n T_m) = 0$. Si $m = 0$, on a $T_0 = 1$ et $J(T_n T_0) = 2^{1-n} \int_0^\pi \cos(nt) dt = 0$.

En conclusion, $J(1) = \pi$, $J(T_n^2) = \pi/2^{2n-1}$ pour $n \geq 1$, et $J(T_n T_m) = 0$ lorsque les deux indices sont distincts. On a également $J(T_0^2) = \pi$.

3. (c) Base polynomiale et intégrales avec T_n .

Question adaptée au programme actuel. Rectification de notation : l'écriture $J(T_n, P)$ du PDF est remplacée par $J(T_n P)$, puisque J est défini pour une seule fonction et qu'il s'agit de l'intégrale du produit.

Méthode 1 — Utiliser les degrés successifs.

Les polynômes $T_0, T_1, \dots, T_n$ ont respectivement les degrés $0, 1, \dots, n$ et sont unitaires. Si une combinaison linéaire de ces polynômes était nulle avec au moins un coefficient non nul, on prendrait le plus grand indice r dont le coefficient est non nul. Le terme de degré r de la combinaison aurait ce même coefficient non nul, car tous les autres polynômes sont de degré inférieur. Cela contredirait la nullité du polynôme.

La famille est donc libre. Elle contient $n + 1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, dont la dimension est $n + 1$; c'est une base. Le même argument montre que $T_0, \dots, T_{n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Méthode 2 — Exploiter l'orthogonalité déjà calculée.

Supposons

$$\sum_{r=0}^n b_r T_r = 0.$$

Pour chaque $j \in \{0, \dots, n\}$, on multiplie par T_j et on applique J . La linéarité et les annulations de 3 (b) donnent $0 = b_j J(T_j^2)$. Or $J(T_0^2) = \pi > 0$ et $J(T_j^2) = \pi/2^{2j-1} > 0$ pour $j \geq 1$. Ainsi $b_j = 0$ pour tout j .

La famille est libre ; sa taille $n + 1$ égale la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, donc elle en est une base. En effectuant le même raisonnement sur la sous-famille d'indices 0 à $n - 1$, on obtient aussi une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

La première preuve s'applique à toute famille de polynômes de degrés successifs. La seconde utilise les intégrales pondérées pour isoler chaque coefficient d'une combinaison linéaire.

Conséquences pour l'intégrale du produit.

Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe des réels $b_0, \dots, b_{n-1}$ tels que

$$P = \sum_{r=0}^{n-1} b_r T_r.$$

Les produits sont continus sur I , donc leurs intégrales existent par 3 (a). La linéarité et l'orthogonalité de 3 (b) donnent

$$J(T_n P) = \sum_{r=0}^{n-1} b_r J(T_n T_r) = 0.$$

Si P est de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$, sa décomposition dans la base est $P = a_n T_n + Q$, avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: le coefficient de T_n est bien a_n , puisque T_n est unitaire. On obtient alors

$$J(T_n P) = a_n J(T_n^2) + J(T_n Q) = a_n \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

Le cas du polynôme nul est inclus dans le premier résultat, sans lui attribuer un coefficient dominant non nul.

Partie II

1. Valeurs des polynômes L_j aux nœuds.

Les nœuds sont distincts, donc les dénominateurs $x_j - x_k$ du produit sont non nuls. Si $i = j$, chaque facteur vaut 1, donc $L_j(x_j) = 1$. Si $i \neq j$, le facteur correspondant à $k = i$ a un numérateur nul, donc $L_j(x_i) = 0$.

Ainsi $L_j(x_i) = 1$ pour $i = j$ et $L_j(x_i) = 0$ pour $i \neq j$. Pour $n = 1$, le produit est vide et $L_1 = 1$, ce qui donne encore $L_1(x_1) = 1$.

2. (a) Linéarité de l'application F .

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$, le polynôme $aP + bQ$ est encore de degré au plus $2n - 1$. L'évaluation et la dérivation sont linéaires :

$$(aP + bQ)(x_j) = aP(x_j) + bQ(x_j), \quad (aP + bQ)'(x_j) = aP'(x_j) + bQ'(x_j).$$

En rassemblant les $2n$ coordonnées, on obtient $F(aP + bQ) = aF(P) + bF(Q)$. Donc F est une application linéaire.

2. (b) Noyau de F .

Si $P \in \text{Ker } F$, on a $P(x_j) = P'(x_j) = 0$ pour chaque j . La première égalité donne une factorisation $P(X) = (X - x_j)Q_j(X)$. En dérivant puis en évaluant en x_j , la seconde égalité donne $Q_j(x_j) = 0$. Ainsi $(X - x_j)^2$ divise P .

Chaque nœud est donc une racine de multiplicité au moins 2. Comme les n nœuds sont distincts, un polynôme non nul possédant ces racines aurait un degré au moins égal à la somme de ces multiplicités, donc au moins $2n$. Cela est impossible pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Pour expliciter la factorisation successive sous-jacente, si l'on retire un facteur $(X - x_1)^2$ et écrit $P = (X - x_1)^2 Q$, alors, pour $j \neq 1$, $x_j - x_1 \neq 0$. L'égalité $P(x_j) = 0$ donne $Q(x_j) = 0$, puis l'égalité $P'(x_j) = 0$ donne $Q'(x_j) = 0$. Les mêmes conditions sont donc conservées aux autres nœuds, et l'on peut retirer leurs facteurs carrés à leur tour. Un polynôme non nul serait ainsi divisible par un produit de degré $2n$.

On conclut que $P = 0$, et $\text{Ker } F = \{0\}$.

2. (c) Isomorphisme.

Le domaine $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ a pour base $1, X, \dots, X^{2n-1}$, donc pour dimension $2n$. L'espace d'arrivée $\mathbb{R}^{2n}$ a aussi dimension $2n$.

La question 2 (b) donne l'injectivité de F . Le théorème du rang fournit $\dim \text{Im } F = 2n - \dim \text{Ker } F = 2n$. Son image est donc tout l'espace d'arrivée. Ainsi F est linéaire et bijective : c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Existence et unicité du polynôme interpolateur.

Les nombres $f(x_j)$ et $f'(x_j)$ sont définis par l'hypothèse de dérivabilité sur I , avec les dérivées unilatérales si un nœud est une extrémité. Ils forment le vecteur

$$V_f = (f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

L'isomorphisme F de 2 (c) a, pour chaque vecteur de son espace d'arrivée, un unique antécédent. Il existe donc un unique $\tilde{f} \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $F(\tilde{f}) = V_f$.

Cette égalité est précisément le système $\tilde{f}(x_j) = f(x_j)$ et $\tilde{f}'(x_j) = f'(x_j)$ pour tous les nœuds. Le polynôme recherché existe et est unique, même si son degré effectif est strictement inférieur à $2n - 1$.

4. Vérification de la formule explicite.

On vérifie que le membre de droite est un polynôme de degré autorisé et satisfait les $2n$ conditions, puis on utilise l'unicité de II.3.

Chaque L_j est de degré $n - 1$ lorsque $n \geq 2$, et $L_1 = 1$ lorsque $n = 1$. Les termes L_j^2 ont donc degré au plus $2n - 2$, et les termes $(X - x_j)L_j^2$ degré au plus $2n - 1$. Le membre de

droite définit un polynôme $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Posons $B_j = L_j^2$ et $C_j = (X - x_j)L_j^2$. On a

$$B'_j = 2L_jL'_j, \quad C'_j = L_j^2 + 2(X - x_j)L_jL'_j.$$

En un nœud x_i , les valeurs de II.1 donnent $B_i(x_i) = 1$ et $B_j(x_i) = 0$ si $j \neq i$. On a aussi $C_j(x_i) = 0$ pour tous les j : si $j = i$, le premier facteur est nul, et si $j \neq i$, $L_j(x_i) = 0$. Par conséquent $H(x_i) = f(x_i)$.

Pour les dérivées, $B'_j(x_i) = 0$ si $j \neq i$ et $B'_i(x_i) = 2L'_i(x_i)$. De même, $C'_j(x_i) = 0$ si $j \neq i$ et $C'_i(x_i) = 1$. Il vient donc

$$H'(x_i) = 2f(x_i)L'_i(x_i) + (f'(x_i) - 2f(x_i)L'_i(x_i)) = f'(x_i).$$

Le polynôme H satisfait toutes les conditions de II.3 et son degré est au plus $2n - 1$. Par unicité, $H = \tilde{f}$, ce qui démontre la formule.

Pour $n = 1$, $L_1 = 1$ et $L'_1 = 0$; la formule devient $\tilde{f}(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$, le polynôme affine satisfaisant les deux conditions prescrites.

Partie III

1. Construction de la fonction auxiliaire.

Posons

$$q(t) = \prod_{j=1}^n (t - x_j)^2.$$

C'est un polynôme unitaire de degré $2n$. Puisque x est distinct des nœuds, $q(x) > 0$, et la condition $\varphi(x) = 0$ détermine de façon unique

$$A = \frac{f(x)}{q(x)}, \quad \varphi(t) = f(t) - Aq(t).$$

La fonction φ est $2n$ fois dérivable sur I . Elle s'annule aux n nœuds, car $f(x_j) = q(x_j) = 0$, et aussi au point supplémentaire x . De plus, $q'(x_j) = 0$, puisque q possède le facteur carré $(t - x_j)^2$; les hypothèses donnent donc $\varphi'(x_j) = f'(x_j) - Aq'(x_j) = 0$.

1. (a) Au moins $2n$ zéros distincts de φ' .

Classons les $n + 1$ points distincts de $\{x, x_1, \dots, x_n\}$ par ordre strictement croissant : $y_0 < y_1 < \dots < y_n$. Sur chaque segment $[y_{r-1}, y_r]$, la fonction φ est continue, dérivable à l'intérieur, et nulle aux deux extrémités. Le théorème de Rolle donne un point $z_r \in]y_{r-1}, y_r[$ tel que $\varphi'(z_r) = 0$, pour $r = 1, \dots, n$.

Ces n points sont distincts, puisque leurs intervalles sont disjoints. Ils ne sont égaux à aucun des x_j , car les nœuds figurent parmi les y_r et aucun de ces points ordonnés ne se trouve à l'intérieur d'un intervalle entre deux points consécutifs.

On dispose par ailleurs des n zéros x_j de φ' , établis dans la construction. Ils sont distincts entre eux et des z_r . Au total, φ' s'annule donc en au moins $2n$ points distincts de I .

Si un nœud est -1 ou 1 , son zéro de φ' est entendu au sens de la dérivée unilatérale. Les applications de Rolle sur les intervalles adjacents n'exigent de dérivabilité ordinaire qu'à l'intérieur des segments, ce qui est bien satisfait.

1. (b) Répétition du théorème de Rolle.

On raisonne par récurrence sur p . Pour $p = 1$, la question 1 (a) donne au moins $2n = 2n - 1 + 1$ zéros distincts.

Supposons le résultat établi pour $p - 1$, avec $2 \leq p \leq 2n$. La fonction $\varphi^{(p-1)}$ possède au moins $2n - p + 2$ zéros distincts. On en sélectionne ce nombre et on les ordonne. Entre chaque paire de zéros consécutifs, on applique Rolle à $\varphi^{(p-1)}$.

Les hypothèses sont vérifiées : l'existence de la dérivée $\varphi^{(p)}$ implique que $\varphi^{(p-1)}$ est dérivable et donc continue sur les segments concernés, avec la continuité unilatérale aux bornes éventuelles de I . Il en résulte au moins $2n - p + 1$ zéros distincts de $\varphi^{(p)}$, chacun dans un intervalle ouvert différent.

La récurrence est achevée. En particulier, $\varphi^{(2n)}$ possède au moins un zéro dans I . Cette preuve ne suppose pas la continuité de la dernière dérivée $f^{(2n)}$; son existence suffit pour la dernière application de Rolle à la dérivée précédente.

1. (c) Expression de $f(x)$ par une dérivée d'ordre $2n$.

La question 1 (b) fournit $c \in I$ tel que $\varphi^{(2n)}(c) = 0$. Le polynôme q est unitaire de degré $2n$, donc sa dérivée d'ordre $2n$ est la constante $(2n)!$. Ainsi,

$$0 = \varphi^{(2n)}(c) = f^{(2n)}(c) - A(2n)!,$$

d'où $A = f^{(2n)}(c)/(2n)!$. Le dénominateur est non nul. En revenant à $f(x) = Aq(x)$, on obtient

$$f(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}.$$

Les applications de Rolle permettent même de choisir le dernier point c à l'intérieur de l'intervalle contenant les points utilisés, mais son appartenance à I suffit à la conclusion demandée.

1. (d) Cas où x est un nœud.

Oui, l'égalité reste vraie. Si $x = x_j$, on a $f(x) = 0$ par hypothèse et $q(x) = 0$. Pour tout $c \in I$, la dérivée $f^{(2n)}(c)$ est définie, et le membre de droite vaut donc 0, comme le membre de gauche. On peut par exemple prendre $c = 0$.

Dans ce cas, la condition $\varphi(x) = 0$ ne détermine plus une constante A unique : on ne reprend pas le quotient $f(x)/q(x)$, dont le dénominateur est nul. C'est l'identité finale elle-même qui est vérifiée directement.

2. Reste de l'interpolation avec les valeurs et les dérivées.

On applique le résultat précédent à la différence $g = f - \tilde{f}$. Cette fonction est $2n$ fois dérivable, puisque f l'est et que $\tilde{f}$ est un polynôme. Les conditions de II.3 donnent $g(x_j) = g'(x_j) = 0$ pour chaque nœud.

Les questions III.1 (c) et III.1 (d) assurent donc que, pour tout $x \in I$, il existe $c \in I$ tel que

$$g(x) = q(x) \frac{g^{(2n)}(c)}{(2n)!}.$$

Or $\deg \tilde{f} \leq 2n - 1$, donc $\tilde{f}^{(2n)} = 0$ et $g^{(2n)} = f^{(2n)}$. En substituant, on obtient

$$f(x) = \tilde{f}(x) + (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n)!}.$$

Cela établit l'égalité (1) pour tout x , y compris les nœuds, où $f(x) = \tilde{f}(x)$ et le produit s'annule. Le point c peut dépendre de x : la conclusion est bien $\forall x \in I, \exists c \in I$.

Partie IV

1. Annulation de l'intégrale de $(x - x_j)L_j^2$.

Les nœuds sont maintenant toutes les racines de T_n . D'après I.1, T_n est unitaire de degré n , donc

$$T_n(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

Pour un indice j fixé, posons

$$D_j = \prod_{k \neq j} (x_j - x_k).$$

Les racines sont distinctes, donc $D_j \neq 0$; si $n = 1$, $D_1 = 1$ par la convention du produit vide.

La définition de L_j donne l'identité polynomiale

$$(X - x_j)L_j(X) = \frac{T_n(X)}{D_j}.$$

En multipliant par L_j , on obtient $(X - x_j)L_j(X)^2 = T_n(X)P_j(X)$, où $P_j = L_j/D_j$ est de degré au plus $n - 1$. La question I.3 (c) donne donc

$$J((X - x_j)L_j^2) = J(T_n P_j) = 0.$$

L'intégrale existe par I.3 (a), puisque son numérateur est un polynôme continu sur I . Ainsi, pour chaque j ,

$$\int_{-1}^1 \frac{(x - x_j)L_j(x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 0.$$

L'identité utilisée est polynomiale et reste vraie aux nœuds; elle ne repose pas sur une division numérique par $x - x_j$ au point x_j .

2. Formule de quadrature avec un point intermédiaire d .

La fonction f est de classe C^{2n} sur I . En particulier, elle est continue, et $f^{(2n)}$ est continue sur le segment. Le polynôme $\tilde{f}$ et toutes les fonctions polynomiales qui suivent sont continus; leurs intégrales pondérées existent par I.3 (a).

La formule de II.4, la linéarité de J et l'annulation démontrée en IV.1 donnent

$$J(\tilde{f}) = \sum_{j=1}^n f(x_j)J(L_j^2) + \sum_{j=1}^n (f'(x_j) - 2f(x_j)L_j'(x_j))J((X - x_j)L_j^2) = \sum_{j=1}^n a_j f(x_j).$$

Il reste à contrôler $J(f - \tilde{f})$. Posons $r = f - \tilde{f}$, $q = T_n^2$ et

$$m = \min_{t \in I} f^{(2n)}(t), \quad M = \max_{t \in I} f^{(2n)}(t).$$

Ces deux réels existent par continuité sur le segment. Comme

$$T_n = \prod_j (X - x_j),$$

le produit carré de l'égalité (1) est exactement q . Pour chaque $x \in I$, cette égalité et $q(x) \geq 0$ donnent

$$\frac{m}{(2n)!} q(x) \leq r(x) \leq \frac{M}{(2n)!} q(x).$$

Aux nœuds, les trois termes sont nuls; l'encadrement reste donc valable. Il porte sur les fonctions continues connues r et q , et n'exige aucune régularité du choix du point intermédiaire c de l'égalité (1).

Le poids $1/\sqrt{1-x^2}$ est strictement positif à l'intérieur de I . On multiplie les inégalités par ce poids, on intègre sur un segment intérieur, puis on passe aux limites des intégrales impropres convergentes. On obtient

$$\frac{m}{(2n)!} J(q) \leq J(r) \leq \frac{M}{(2n)!} J(q).$$

La question I.3 (b) donne $J(q) = J(T_n^2) = \pi/2^{2n-1} > 0$. En divisant par cette quantité positive et en multipliant par $(2n)!$, on trouve

$$m \leq \frac{(2n)! J(r)}{J(q)} \leq M.$$

Si $m = M$, la fonction $f^{(2n)}$ est constante et prend cette valeur en tout point de I . Si $m < M$, elle atteint son minimum et son maximum sur I et, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend toute valeur entre les deux. Dans les deux cas, il existe donc $d \in I$ tel que

$$f^{(2n)}(d) = \frac{(2n)! J(r)}{J(q)}.$$

On en déduit $J(r) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(d)}{(2n)!}$. Comme $J(f) = J(\tilde{f}) + J(r)$, la formule demandée est

$$J(f) = \sum_{j=1}^n a_j f(x_j) + \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{f^{(2n)}(d)}{(2n)!}.$$

Le point d est obtenu après l'intégration par continuité de la dérivée d'ordre $2n$. La démonstration combine un encadrement ponctuel et les intégrales de fonctions continues; elle n'utilise aucun échange entre une limite et une intégrale.

3. Exactitude pour les polynômes de degré au plus $2n - 1$.

Méthode 1 — Annuler le terme d'erreur.

Si f est un polynôme de degré au plus $2n - 1$, il est de classe C^{2n} sur I et sa dérivée

d'ordre $2n$ est identiquement nulle. La formule de IV.2 donne directement

$$J(f) = \sum_{j=1}^n a_j f(x_j) = \tilde{J}(f).$$

Cela prouve l'exactitude demandée, y compris pour le polynôme nul.

Méthode 2 — Utiliser l'unicité de l'interpolation.

Le polynôme f appartient à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et satisfait lui-même les conditions $P(x_j) = f(x_j)$ et $P'(x_j) = f'(x_j)$. Par l'unicité de II.3, son interpolateur est donc $\tilde{f} = f$.

L'intégration de la formule de II.4 et IV.1 ont établi

$$J(\tilde{f}) = \sum_j a_j f(x_j).$$

Ainsi $J(f) = J(\tilde{f}) = \tilde{J}(f)$, ce qui redonne l'exactitude sans utiliser le reste de III.2.

La première méthode lit l'exactitude dans la formule d'erreur. La seconde la rattache directement à la reproduction des polynômes par l'interpolation.

La remarque finale du sujet indique, sans demander sa démonstration, $a_j = \pi/n$ pour chaque j . Avec cette valeur, la formule approchée s'écrit

$$\tilde{J}(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j).$$

Les deux preuves d'exactitude ci-dessus n'ont pas besoin de cette égalité supplémentaire. Pour $n = 1$, $x_1 = 0$, $L_1 = 1$ et $a_1 = \pi$, ce qui donne bien $\tilde{J}(f) = \pi f(0)$, exacte pour les polynômes affines.

Relevé des adaptations

- Partie I, définition précédant la question 1 et question 1 : la définition par une fonction trigonométrique réciproque est remplacée par $T_n(\cos \theta) = 2^{1-n} \cos(n\theta)$, avec $\theta \in [0, \pi]$. La bijectivité du cosinus sur cet intervalle est justifiée dans le corrigé. Cette reformulation conserve exactement les fonctions étudiées et utilise uniquement les fonctions du référentiel fourni.
- Partie I, 3 (c) : rectification de la notation $J(T_n, P)$ en $J(T_n P)$, en cohérence avec la définition de J et avec les intégrales de produits demandées en 3 (b). Les conclusions mathématiques sont inchangées.