



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1979

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Soient a et b des réels tels que $a < b$. On désigne par f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs réelles. On suppose qu'en tout point $v \in]a, b[$, la fonction f admet une dérivée seconde $f''(v)$.

On pose $c = \frac{a+b}{2}$.

Partie I

Soit Γ le graphe de f .

1. On désigne par T la tangente à Γ au point d'abscisse c .

1. a) Donner une équation de T sous la forme $y = \tau(x)$.

1. b) Calculer l'intégrale $\int_a^b \tau(x) dx$.

Dans la suite de la première partie, on suppose que $f''(v) \geq 0$ pour tout $v \in]a, b[$.

2. Étudier la variation de la fonction ψ définie sur $[a, b]$ par $\psi(x) = f(x) - \tau(x)$. En déduire le signe de $\psi(x)$.

3. Soit D la droite joignant les points de Γ d'abscisses a et b .

3. a) Donner une équation de D sous la forme $y = \delta(x)$.

3. b) Étudier la variation de la fonction θ définie sur $[a, b]$ par $\theta(x) = f(x) - \delta(x)$. En déduire le signe de $\theta(x)$.

3. c) Calculer l'intégrale $\int_a^b \delta(x) dx$.

4. Comparer deux à deux les réels

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad J = (b-a)f(c), \quad K = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

En déduire l'encadrement $1 \leq \ln 3 \leq \frac{4}{3}$. Le symbole $\ln$ représente le logarithme népérien.

Partie II

1. Soient $x \in [a, b] \setminus \{c\}$ et φ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(t) = f(t) - f(c) - (t-c)f'(c) - \lambda(t-c)^2,$$

où λ est le réel déterminé par la relation $\varphi(x) = 0$.

En appliquant le théorème de Rolle à φ et à sa dérivée, montrer qu'il existe $v_0 \in]a, b[$ tel que $\lambda = \frac{1}{2}f''(v_0)$.

Retrouver ainsi le signe de $\psi(x)$ étudié en I.2, sous l'hypothèse de la partie I.

2. On suppose qu'il existe un réel $M_2 \geq 0$ tel que $|f''(v)| \leq M_2$ pour tout $v \in]a, b[$.

2. a) Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - f(c) - (x-c)f'(c)| \leq \frac{M_2}{2}(x-c)^2.$$

2. b) En déduire que

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(c) \right| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3.$$

Examiner le cas où f est une fonction polynomiale de degré 2.

Partie III

1. Calculer le nombre

$$\int_a^b f(x) dx - (b-a)f(c) - \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) - f'(a))$$

lorsque :

1. a) $f(x) = 1$.

1. b) $f(x) = x$.

1. c) $f(x) = x^2$.

1. d) $f(x) = x^3$.

Généraliser les résultats obtenus au cas où f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

Dans la suite du problème, on désigne par ω un réel strictement positif et par g une fonction définie sur $[-\omega, \omega]$. On suppose que g est impaire, c'est-à-dire que $g(-t) = -g(t)$ pour tout $t \in [-\omega, \omega]$. On suppose en outre que g est cinq fois dérivable sur cet intervalle et que sa dérivée cinquième $g^{(5)}$ est continue. Les dérivées aux extrémités sont comprises de manière unilatérale.

2. Soit $u \in [-\omega, \omega]$.

2. a) On considère les fonctions α et β définies sur $[-\omega, \omega]$ par

$$\alpha(t) = \frac{1}{24}(u-t)^4,$$

$$\beta(t) = \alpha(t)g^{(4)}(t) - \alpha'(t)g'''(t) + \alpha''(t)g''(t) - \alpha'''(t)g'(t) + \alpha^{(4)}(t)g(t).$$

Calculer la dérivée de β . En déduire la relation

$$g(u) = ug'(0) + \frac{u^3}{6}g'''(0) + \frac{1}{24} \int_0^u (u-t)^4 g^{(5)}(t) dt.$$

2. b) Établir de même la relation

$$g''(u) = ug'''(0) + \frac{1}{2} \int_0^u (u-t)^2 g^{(5)}(t) dt.$$

2. c) Soit $N_5 \geq 0$ tel que $|g^{(5)}(t)| \leq N_5$ pour tout $t \in [-\omega, \omega]$.

Montrer que

$$\left| g(u) - ug'(0) - \frac{u^2}{6}g''(u) \right| \leq \frac{N_5}{24} \left| \int_0^u (u-t)^2(u^2 + 2ut - t^2) dt \right|.$$

Calculer l'intégrale $\int_0^u (u-t)^2(u^2 + 2ut - t^2) dt$.

3. On suppose que f est quatre fois dérivable sur $[a, b]$ et que sa dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue. Soit $M_4 \geq 0$ tel que $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$ pour tout $x \in [a, b]$.

On choisit $\omega = \frac{b-a}{2}$ et, avec $t = x - c$, on pose, pour $u \in [-\omega, \omega]$,

$$g(u) = \frac{1}{2} \int_{-u}^u f(c+t) dt.$$

Déduire de la question précédente la majoration

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(c) - \frac{(b-a)^2}{24} (f'(b) - f'(a)) \right| \leq \frac{7M_4}{5760} (b-a)^5.$$

Retrouver ainsi les résultats de III.1.