



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1979

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

On note $L = b - a > 0$, $c = (a + b)/2$ et $d = L/2$. Ainsi, $a = c - d$ et $b = c + d$. L'existence de f'' sur $]a, b[$ implique que f' y est dérivable, donc continue ; en particulier, $f'(c)$ existe. On ne suppose pas que f'' est continue dans les deux premières parties.

1. a) La tangente au graphe au point $(c, f(c))$ a pour pente $f'(c)$. Son équation est donc

$$y = \tau(x) = f(c) + (x - c)f'(c).$$

1. b) La fonction τ est affine et continue sur $[a, b]$. Par linéarité,

$$\int_a^b \tau(x) dx = (b - a)f(c) + f'(c) \int_a^b (x - c) dx.$$

Comme $a - c = -d$ et $b - c = d$, la primitive $(x - c)^2/2$ donne

$$\int_a^b (x - c) dx = \frac{d^2}{2} - \frac{d^2}{2} = 0.$$

Ainsi,
$$\int_a^b \tau(x) dx = (b - a)f(c).$$

2. La fonction $\psi = f - \tau$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On a

$$\psi'(x) = f'(x) - f'(c).$$

Sous l'hypothèse $f'' \geq 0$, f' est croissante sur $]a, b[$. Pour le justifier sans supposer f'' continue, si $s < t$ sont deux points intérieurs, le théorème des accroissements finis s'applique à f' sur $[s, t]$: elle y est continue et dérivable à l'intérieur. Il existe $v \in]s, t[$ tel que $f'(t) - f'(s) = (t - s)f''(v) \geq 0$.

Donc $\psi'(x) \leq 0$ pour $a < x < c$, et $\psi'(x) \geq 0$ pour $c < x < b$. La fonction ψ est décroissante au sens large sur $[a, c]$ et croissante au sens large sur $[c, b]$; les conclusions

aux extrémités utilisent sa continuité.

Son minimum est atteint en c , où $\psi(c) = 0$. Par conséquent, $\psi(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, soit $f(x) \geq \tau(x)$. L'égalité peut se produire ailleurs qu'en c , puisque l'hypothèse ne suppose pas f'' strictement positive.

3. a) La pente de la droite joignant les deux points est $s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, dont le dénominateur est non nul. On peut donc écrire

$$y = \delta(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Une forme utile pour la suite est $\delta(x) = \frac{b - x}{b - a}f(a) + \frac{x - a}{b - a}f(b)$.

3. b) La fonction $\theta = f - \delta$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, avec $\theta'(x) = f'(x) - s$. Elle vérifie $\theta(a) = \theta(b) = 0$.

Le théorème de Rolle appliqué à θ donne un point $\xi \in]a, b[$ tel que $\theta'(\xi) = 0$, donc $f'(\xi) = s$. Comme f' est croissante, $\theta'(x) \leq 0$ pour $a < x < \xi$, et $\theta'(x) \geq 0$ pour $\xi < x < b$.

Ainsi, θ est décroissante au sens large sur $[a, \xi]$ et croissante au sens large sur $[\xi, b]$. Le minimum est atteint en ξ , éventuellement aussi sur un intervalle si la dérivée s'annule sur cet intervalle.

Pour $x \leq \xi$, $\theta(x) \leq \theta(a) = 0$ par décroissance. Pour $x \geq \xi$, $\theta(x) \leq \theta(b) = 0$ par croissance. On conclut que $\theta(x) \leq 0$ sur tout $[a, b]$, soit $f(x) \leq \delta(x)$.

Cette description ne requiert pas que le point ξ soit unique et couvre notamment le cas où f est affine.

3. c) En utilisant la seconde expression de δ ,

$$\int_a^b \delta(x) dx = \frac{f(a)}{L} \int_a^b (b - x) dx + \frac{f(b)}{L} \int_a^b (x - a) dx.$$

Les deux intégrales valent $L^2/2$. Par conséquent,

$$\int_a^b \delta(x) dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

4. Les questions 2 et 3 donnent l'encadrement point par point $\tau(x) \leq f(x) \leq \delta(x)$ sur $[a, b]$. Les trois fonctions sont continues, donc intégrables sur ce segment ; la croissance de l'intégrale donne

$$\int_a^b \tau(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \delta(x) dx.$$

En utilisant 1. b) et 3. c), on obtient $J \leq I \leq K$, ce qui compare aussi J et K : $J \leq K$.

Pour le logarithme, choisissons $a = 1$, $b = 3$ et $f(x) = 1/x$. Cette fonction est continue sur $[1, 3]$, deux fois dérivable à l'intérieur, et $f''(x) = 2/x^3 > 0$. Toutes les hypothèses sont satisfaites.

Le milieu est $c = 2$, et

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln 3, \quad J = 2 \times \frac{1}{2} = 1, \quad K = \frac{2}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

L'encadrement demandé est donc $1 \leq \ln 3 \leq \frac{4}{3}$.

Partie II

1. Comme $x \neq c$, $(x - c)^2 > 0$. La condition $\varphi(x) = 0$ détermine un unique réel

$$\lambda = \frac{f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)}{(x - c)^2} = \frac{\psi(x)}{(x - c)^2}.$$

On a aussi $\varphi(c) = 0$ et $\varphi'(c) = 0$, puisque

$$\varphi'(t) = f'(t) - f'(c) - 2\lambda(t - c).$$

La fonction φ est continue sur le segment d'extrémités c et x et dérivable à son intérieur, même lorsque $x = a$ ou $x = b$. Le théorème de Rolle donne donc η strictement entre c et x tel que $\varphi'(\eta) = 0$.

Les deux points η et c sont dans $]a, b[$. Sur le segment qui les joint, φ' est continue, car f' est dérivable donc continue à l'intérieur de $[a, b]$. Elle est dérivable à l'intérieur de ce segment, car f'' y existe. On peut donc lui appliquer Rolle, ses valeurs aux deux extrémités étant nulles.

Il existe v_0 strictement entre η et c , donc dans $]a, b[$, tel que

$$0 = \varphi''(v_0) = f''(v_0) - 2\lambda.$$

Ainsi, $\lambda = \frac{1}{2}f''(v_0)$, et

$$f(x) - f(c) - (x - c)f'(c) = \frac{1}{2}f''(v_0)(x - c)^2.$$

Sous l'hypothèse $f'' \geq 0$ de la partie I, cette égalité donne $\psi(x) \geq 0$ pour $x \neq c$; pour $x = c$, $\psi(c) = 0$. On retrouve le signe établi en I.2, sans exiger la continuité de f'' .

2. a) Pour $x \neq c$, la question précédente donne un point $v_0 \in]a, b[$ tel que le membre à majorer vaut $\frac{1}{2}f''(v_0)(x - c)^2$.

En prenant les valeurs absolues et en utilisant $|f''(v_0)| \leq M_2$,

$$|f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)| \leq \frac{M_2}{2}(x - c)^2.$$

Pour $x = c$, les deux membres sont nuls. La majoration vaut donc pour tout $x \in [a, b]$, y compris les extrémités.

2. b) Comme $\int_a^b (x - c) dx = 0$, on peut écrire l'erreur sous la forme

$$\int_a^b f(x) dx - Lf(c) = \int_a^b (f(x) - f(c) - (x - c)f'(c)) dx.$$

L'intégrande est continu. L'inégalité triangulaire pour l'intégrale, puis 2. a), donnent

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Lf(c) \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_a^b (x - c)^2 dx.$$

Une primitive fournit

$$\int_a^b (x - c)^2 dx = \frac{d^3 - (-d)^3}{3} = \frac{2d^3}{3} = \frac{L^3}{12}.$$

On obtient donc $\left| \int_a^b f(x) dx - (b - a)f(c) \right| \leq \frac{M_2}{24}(b - a)^3$.

Examinons une fonction polynomiale $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ avec $A \neq 0$. Son développement exact au point c est $f(x) = f(c) + (x - c)f'(c) + A(x - c)^2$, et sa dérivée seconde vaut $2A$.

Après intégration, l'erreur est exactement

$$\int_a^b f(x) dx - Lf(c) = \frac{AL^3}{12},$$

et sa valeur absolue est $|A|L^3/12$. Le plus petit majorant admissible de $|f''|$ est $M_2 = 2|A|$. Pour ce choix, la borne obtenue vaut $M_2L^3/24 = |A|L^3/12$: elle est atteinte.

Si l'on choisit un M_2 plus grand, l'inégalité reste valable mais devient stricte. La constante $1/24$ ne peut donc pas être diminuée dans une majoration valable pour toutes les fonctions satisfaisant l'hypothèse.

Partie III

Notons, pour une fonction possédant les dérivées nécessaires aux extrémités,

$$R(f) = \int_a^b f(x) dx - Lf(c) - \frac{L^2}{24}(f'(b) - f'(a)).$$

1. a) Pour $f(x) = 1$, l'intégrale vaut L , $Lf(c) = L$, et $f'(b) - f'(a) = 0$. Ainsi,
 $R(f) = L - L - 0 = 0$.

1. b) Pour $f(x) = x$,

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{L(a+b)}{2} = Lc.$$

Comme $f(c) = c$ et f' vaut constamment 1, on obtient $R(f) = Lc - Lc - 0 = 0$.

1. c) Pour $f(x) = x^2$, le changement de variable affine $t = x - c$ donne

$$\int_a^b x^2 dx = \int_{-d}^d (c^2 + 2ct + t^2) dt = 2dc^2 + \frac{2d^3}{3} = Lc^2 + \frac{L^3}{12}.$$

L'intégrale de t est nulle sur l'intervalle symétrique. De plus,
 $f'(b) - f'(a) = 2b - 2a = 2L$, donc

$$R(f) = Lc^2 + \frac{L^3}{12} - Lc^2 - \frac{L^2}{24}(2L) = 0.$$

1. d) Pour $f(x) = x^3$, la même translation donne

$$\int_a^b x^3 dx = \int_{-d}^d (c^3 + 3c^2t + 3ct^2 + t^3) dt = 2dc^3 + 2cd^3 = Lc^3 + \frac{cL^3}{4}.$$

Les termes impairs ont une intégrale nulle. La différence des dérivées aux extrémités vaut

$$f'(b) - f'(a) = 3(b^2 - a^2) = 3L(a + b) = 6cL.$$

Donc
$$R(f) = Lc^3 + \frac{cL^3}{4} - Lc^3 - \frac{L^2}{24}(6cL) = 0.$$

Méthode 1 — Généralisation par linéarité

L'application R est linéaire : l'intégration, la dérivation et l'évaluation le sont. Tout polynôme de degré au plus 3 est une combinaison linéaire des quatre polynômes 1, X , X^2 , X^3 .

Les quatre résultats précédents donnent donc $R(P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$. L'identité est ainsi exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3, y compris le polynôme nul.

Méthode 2 — Développement polynomial exact au milieu

Pour un polynôme P de degré au plus 3, la formule de Taylor polynomiale est exacte :

$$P(c+t) = P(c) + tP'(c) + \frac{t^2}{2}P''(c) + \frac{t^3}{6}P'''(c).$$

En intégrant sur $[-d, d]$, les deux termes impairs disparaissent et l'on obtient

$$\int_a^b P(x) dx = LP(c) + \frac{L^3}{24} P''(c).$$

D'autre part, le développement exact de P' donne

$$P'(c+d) = P'(c) + dP''(c) + \frac{d^2}{2} P'''(c),$$

$$P'(c-d) = P'(c) - dP''(c) + \frac{d^2}{2} P'''(c).$$

La différence vaut $2dP''(c) = LP''(c)$. Ainsi, $\frac{L^2}{24}(P'(b) - P'(a)) = \frac{L^3}{24} P''(c)$, et l'on retrouve $R(P) = 0$.

La linéarité prolonge les quatre calculs demandés; la seconde méthode explique le rôle de la symétrie autour du milieu et l'annulation des termes impairs.

Dans la question 2, g est de classe C^5 sur l'intervalle considéré. Son imparité entraîne $g(0) = g''(0) = g^{(4)}(0) = 0$. En effet, en dérivant successivement $g(-t) = -g(t)$, on obtient $g^{(k)}(-t) = (-1)^{k+1} g^{(k)}(t)$; pour les ordres pairs, la valeur en 0 est donc son propre opposé et vaut 0.

2. a) Méthode 1 — Dérivation de l'expression auxiliaire imposée

Pour u fixé, les dérivées de α sont

$$\alpha'(t) = -\frac{1}{6}(u-t)^3, \quad \alpha''(t) = \frac{1}{2}(u-t)^2, \quad \alpha'''(t) = -(u-t), \quad \alpha^{(4)}(t) = 1, \quad \alpha^{(5)}(t) = 0.$$

En dérivant chaque produit de β , on obtient

$$\beta' = \alpha' g^{(4)} + \alpha g^{(5)} - \alpha'' g''' - \alpha' g^{(4)} + \alpha''' g'' + \alpha'' g''' - \alpha^{(4)} g' - \alpha''' g'' + \alpha^{(5)} g + \alpha^{(4)} g'.$$

Tous les termes se compensent deux à deux, sauf $\alpha g^{(5)}$, et le terme contenant $\alpha^{(5)}$ est nul. Donc

$$\beta'(t) = \frac{1}{24}(u-t)^4 g^{(5)}(t).$$

Au point $t = u$, α , α' , α'' et α''' sont nuls, tandis que $\alpha^{(4)} = 1$. Ainsi, $\beta(u) = g(u)$.

Au point 0, les termes contenant $g(0)$, $g''(0)$ et $g^{(4)}(0)$ sont nuls par imparité. Les deux autres donnent

$$\beta(0) = \frac{u^3}{6} g'''(0) + u g'(0).$$

La dérivée β' est continue; le théorème fondamental du calcul intégral donne

$\beta(u) - \beta(0) = \int_0^u \beta'(t) dt$, aussi pour $u < 0$, avec l'orientation usuelle des intégrales. On en déduit

$$g(u) = u g'(0) + \frac{u^3}{6} g'''(0) + \frac{1}{24} \int_0^u (u-t)^4 g^{(5)}(t) dt.$$

Méthode 2 — Formule de Taylor avec reste intégral

Puisque g est de classe C^5 entre 0 et u , la formule de Taylor à l'ordre 4 donne

$$g(u) = g(0) + u g'(0) + \frac{u^2}{2} g''(0) + \frac{u^3}{6} g'''(0) + \frac{u^4}{24} g^{(4)}(0) + \frac{1}{24} \int_0^u (u-t)^4 g^{(5)}(t) dt.$$

Les trois coefficients d'ordre pair sont nuls par imparité ; il reste exactement la formule demandée. Pour $u = 0$, tous les termes sont nuls et l'égalité vaut également.

La première preuve déroule la construction imposée et montre la compensation des dérivées ; la seconde reconnaît cette compensation comme la formule de Taylor du programme.

2. b) Méthode 1 — Même construction avec un facteur quadratique

Pour u fixé, posons $A(t) = \frac{1}{2}(u-t)^2$ et $B(t) = A(t)g^{(4)}(t) - A'(t)g'''(t) + A''(t)g''(t)$.

On a $A'(t) = -(u-t)$, $A''(t) = 1$ et $A'''(t) = 0$. En dérivant les trois produits, les termes se compensent et l'on obtient $B'(t) = A(t)g^{(5)}(t) = \frac{1}{2}(u-t)^2g^{(5)}(t)$.

Au point u , $B(u) = g''(u)$. Au point 0, $g^{(4)}(0) = g''(0) = 0$, donc $B(0) = ug'''(0)$.

L'intégration de B' entre 0 et u donne

$$g''(u) = ug'''(0) + \frac{1}{2} \int_0^u (u-t)^2 g^{(5)}(t) dt.$$

L'argument vaut pour les deux signes de u et pour $u = 0$.

Méthode 2 — Taylor appliqué à g''

La fonction g'' est de classe C^3 , et sa dérivée troisième est $g^{(5)}$. La formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 donne

$$g''(u) = g''(0) + ug'''(0) + \frac{u^2}{2}g^{(4)}(0) + \frac{1}{2} \int_0^u (u-t)^2 g^{(5)}(t) dt.$$

Les valeurs $g''(0)$ et $g^{(4)}(0)$ sont nulles par imparité ; on retrouve l'égalité demandée. Comme en 2. a), la méthode auxiliaire imposée et la formule de Taylor donnent deux lectures du même reste intégral.

2. c) Soustrayons $ug'(0)$ et $\frac{u^2}{6}g''(u)$ à la formule de 2. a), en utilisant 2. b). Les termes contenant $g'''(0)$ s'annulent :

$$g(u) - ug'(0) - \frac{u^2}{6}g''(u) = \frac{1}{24} \int_0^u ((u-t)^4 - 2u^2(u-t)^2) g^{(5)}(t) dt.$$

Le facteur polynomial s'écrit

$$(u-t)^4 - 2u^2(u-t)^2 = -(u-t)^2(u^2 + 2ut - t^2).$$

Notons $K_u(t) = (u-t)^2(u^2 + 2ut - t^2)$. Sur le segment joignant 0 et u , $|u-t| \leq |u|$, et

$$u^2 + 2ut - t^2 = 2u^2 - (u-t)^2 \geq u^2 \geq 0.$$

Donc $K_u(t) \geq 0$ sur ce segment, quel que soit le signe de u . La différence à majorer est $-\frac{1}{24} \int_0^u K_u(t)g^{(5)}(t) dt$.

Si $u > 0$, l'inégalité triangulaire et $|g^{(5)}| \leq N_5$ donnent

$$\left| \int_0^u K_u(t)g^{(5)}(t) dt \right| \leq N_5 \int_0^u K_u(t) dt.$$

Si $u < 0$, on inverse les bornes, puis on utilise la même positivité :

$$\left| \int_0^u K_u(t)g^{(5)}(t) dt \right| = \left| \int_u^0 K_u(t)g^{(5)}(t) dt \right| \leq N_5 \int_u^0 K_u(t) dt = N_5 \left| \int_0^u K_u(t) dt \right|.$$

Pour $u = 0$, les deux membres sont nuls. Dans tous les cas, on obtient exactement la majoration demandée.

Pour calculer l'intégrale, développons le noyau :

$$K_u(t) = (u^2 - 2ut + t^2)(u^2 + 2ut - t^2) = u^4 - 4u^2t^2 + 4ut^3 - t^4.$$

L'intégration des quatre monômes entre 0 et u donne, pour tout réel u ,

$$\int_0^u K_u(t) dt = u^5 - \frac{4}{3}u^5 + u^5 - \frac{1}{5}u^5 = \frac{7}{15}u^5.$$

Sa valeur absolue vaut $\frac{7}{15}|u|^5$. Par conséquent,

$$\left| g(u) - ug'(0) - \frac{u^2}{6}g''(0) \right| \leq \frac{7N_5}{360}|u|^5.$$

3. Question adaptée au programme actuel. Rectification de la définition auxiliaire :

l'intégrale donnée dans le PDF, $g(u) = \int_{-1}^u f(c+t) dt$, n'est pas impaire en général.

Elle peut aussi faire intervenir des points hors de $[a, b]$. Elle est remplacée par

$g(u) = \frac{1}{2} \int_{-u}^u f(c+t) dt$, avec $\omega = (b-a)/2$, afin de satisfaire les hypothèses précises de la question 2.

Justifions ces hypothèses. Pour $|u| \leq \omega$, le segment d'extrémités $-u$ et u est contenu dans $[-\omega, \omega]$, et $c+t \in [a, b]$ sur ce segment. L'intégrale est donc définie.

L'inversion des bornes donne $g(-u) = \frac{1}{2} \int_u^{-u} f(c+t) dt = -g(u)$. La fonction g est impaire.

Pour vérifier la régularité sans utiliser de dérivation sous le signe intégral, posons

$h(t) = f(c+t)$ et $H(v) = \int_0^v h(t) dt$ sur $[-\omega, \omega]$. Comme f est de classe C^4 , h l'est aussi et le théorème fondamental du calcul intégral donne $H' = h$, donc H est de classe C^5 .

La relation de Chasles donne $g(u) = \frac{1}{2}(H(u) - H(-u))$. On dérive cette expression composée :

$$g'(u) = \frac{1}{2}(f(c+u) + f(c-u)),$$

$$g''(u) = \frac{1}{2}(f'(c+u) - f'(c-u)),$$

$$g^{(5)}(u) = \frac{1}{2}(f^{(4)}(c+u) + f^{(4)}(c-u)).$$

Ces identités montrent que g est de classe C^5 , avec les valeurs unilatérales aux extrémités, et que

$$|g^{(5)}(u)| \leq \frac{1}{2}(|f^{(4)}(c+u)| + |f^{(4)}(c-u)|) \leq M_4.$$

La question 2. c) s'applique avec $N_5 = M_4$. À $u = \omega$, le changement de variable affine $x = c + t$ donne

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\omega}^{\omega} f(c+t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx,$$

$$g'(0) = f(c), \quad g''(\omega) = \frac{1}{2}(f'(b) - f'(a)).$$

En remplaçant ces trois expressions dans la majoration de 2. c),

$$\left| \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx - \omega f(c) - \frac{\omega^2}{12}(f'(b) - f'(a)) \right| \leq \frac{7M_4}{360} \omega^5.$$

On multiplie par 2 et on utilise $2\omega = L$, $\omega^2/6 = L^2/24$ et $\omega^5 = L^5/32$. Il vient

$$\left| \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(c) - \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) - f'(a)) \right| \leq \frac{14M_4}{360 \times 32}(b-a)^5 = \frac{7M_4}{5760}(b-a)^5.$$

La constante et tous les termes de la majoration demandée sont ainsi retrouvés.

Enfin, si f est un polynôme de degré au plus 3, alors $f^{(4)} = 0$ et l'on peut choisir $M_4 = 0$. Le membre de droite est nul, donc l'expression entre valeurs absolues est exactement nulle. On retrouve l'identité démontrée en III.1 pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Relevé des adaptations

III.3 : la définition $g(u) = \int_{-1}^u f(c+t) dt$ est rectifiée en $g(u) = \frac{1}{2} \int_{-u}^u f(c+t) dt$, et l'on précise $\omega = (b-a)/2$. La nouvelle définition est impaire, reste dans le domaine de f , possède la régularité requise et vérifie $|g^{(5)}| \leq M_4$. Elle permet de démontrer la majoration finale avec le coefficient original $7/5760$, sans résultat supplémentaire admis.