



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1978

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

E_0 est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. E_1 est l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une dérivée continue.

Le nombre n est un entier strictement positif.

Partie I

À tout élément f de E_0 , on associe l'application F_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F_n(0) = f(0), \quad F_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} f(t) dt \quad \text{si } x \neq 0.$$

1. Que peut-on dire de F_n si f est paire ? Si f est impaire ?
2. Calculer F_n lorsque $f(x) = |x|^\alpha$, avec $\alpha \geq 0$, puis lorsque

$$f(x) = \sum_{p=0}^m a_p x^p.$$

Pour $\alpha = 0$, on entend $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Si f est bornée sur $[-A, A]$ par le nombre M , montrer alors que F_n a la même propriété.
4. Montrer que F_n appartient à E_0 .
5. a) Montrer que, si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers plus l'infini, respectivement moins l'infini, $F_n(x)$ a la même propriété. On pourra considérer une décomposition de l'intervalle d'intégration en $[0, x_0]$ et $[x_0, x]$ et, pour tout x assez grand et x_0 bien choisi, majorer séparément les deux intégrales.
5. b) Étendre au cas où $f(x)$ tend vers $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. c) Étendre au cas où $f(x)$ tend vers plus l'infini.
6. Montrer que F_n admet une dérivée F'_n en tout point $x \neq 0$ et que :

$$F'_n(x) = \frac{n}{x}(f(x) - F_n(x)).$$

Partie II

Désormais, f appartient à E_1 .

1. Montrer que F_n admet une dérivée en tout point. Calculer $F'_n(0)$ en fonction de n et de $f'(0)$.
2. Montrer que F_n appartient à E_1 et que T_n , défini par $T_n(f) = F_n$, est un endomorphisme de E_1 .
3. T_n est-il injectif? Surjectif? On pourra étudier la dérivabilité de F'_n .
4. On suppose désormais que f est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité, notée φ , appartient à E_0 . En écrivant $F'_n(x) = \frac{n}{x^{n+1}}h(x)$ pour $x \neq 0$, étudier les variations et le signe de $h(x)$. En déduire que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire notée X_n , de densité de probabilité Φ_n .
5. Si $A \neq 0$, montrer que, pour tout entier $p \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$\begin{aligned} \int_0^A t^p \Phi_n(t) dt &= \frac{n}{n-p} A^p (F_n(A) - F_p(A)) \\ &= \frac{n}{n-p} \left(\int_0^A t^p \varphi(t) dt - A^{p-n} \int_0^A t^n \varphi(t) dt \right). \end{aligned}$$

6. On suppose de plus que, pour tout entier strictement positif p , le moment d'ordre p de X existe :

$$M_p(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \varphi(t) dt.$$

En déduire l'existence et la valeur du moment d'ordre p de X_n , noté $M_p(X_n)$, pour tout entier strictement positif $p < n$. Montrer que, si p reste fixé, le moment $M_p(X_n)$ a pour limite $M_p(X)$ lorsque n tend vers plus l'infini.

7. Montrer que, pour tout x fixé, la valeur en x de la fonction de répartition de X_n a pour limite la valeur en x de la fonction de répartition de X .