



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1978

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

Dans cette partie, $n \geq 1$ est fixé et f est continue sur $\mathbb{R}$. Toutes les intégrales sur un segment ci-dessous existent, car leurs intégrandes sont continues.

Une écriture utile, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, est :

$$F_n(x) = n \int_0^1 u^{n-1} f(xu) du. \quad (\text{R})$$

Pour $x \neq 0$, elle résulte du changement de variable affine $t = xu$. Lorsque $x < 0$, l'orientation de l'intégrale est conservée par le facteur $dt = x du$; le produit $t^{n-1} dt$ devient $x^n u^{n-1} du$. Pour $x = 0$, le membre de droite vaut $n f(0) \int_0^1 u^{n-1} du = f(0)$, conformément à la définition.

Le poids nu^{n-1} est positif ou nul sur $[0, 1]$ et son intégrale vaut 1.

1. Parité de F_n .

On utilise (R), qui évite toute difficulté de signe liée à x^n . Si f est paire, alors, pour tout x ,

$$F_n(-x) = n \int_0^1 u^{n-1} f(-xu) du = n \int_0^1 u^{n-1} f(xu) du = F_n(x).$$

Ainsi F_n est paire, quelle que soit la parité de n .

Si f est impaire, le même calcul donne :

$$F_n(-x) = -n \int_0^1 u^{n-1} f(xu) du = -F_n(x).$$

En particulier, $f(0) = 0$ et $F_n(0) = 0$. Ainsi F_n est impaire.

2. Images d'une puissance et d'un polynôme.

Pour $\alpha > 0$ et tout x , la relation (R) donne :

$$F_n(x) = n|x|^\alpha \int_0^1 u^{n+\alpha-1} du = \frac{n}{n+\alpha} |x|^\alpha.$$

L'intégrale est convergente puisque $n + \alpha > 0$; ici l'intégrande se prolonge même continûment en 0. Cette expression vaut également en $x = 0$, où elle est nulle. Pour $\alpha = 0$, la convention $f = 1$ donne directement $F_n = 1$, ce qui correspond au coefficient $n/(n+0) = 1$.

Pour

$$f(x) = \sum_{p=0}^m a_p x^p,$$

la linéarité d'une somme finie permet d'intégrer terme à terme :

$$F_n(x) = \sum_{p=0}^m a_p n x^p \int_0^1 u^{n+p-1} du = \sum_{p=0}^m \frac{n}{n+p} a_p x^p.$$

Tous les dénominateurs sont strictement positifs. Le terme constant est $a_0 = f(0)$, donc la formule respecte aussi la définition en 0.

Précision de l'énoncé : pour $\alpha = 0$, la fonction est prise égale à 1 également en 0, afin de définir sans ambiguïté un élément de E_0 .

3. Conservation d'une borne sur un segment.

On suppose $A \geq 0$ et $|f(t)| \leq M$ pour $t \in [-A, A]$, avec $M \geq 0$. Si $x \in [-A, A]$ et $u \in [0, 1]$, alors $xu \in [-A, A]$. En utilisant le poids positif de (R),

$$|F_n(x)| \leq n \int_0^1 u^{n-1} |f(xu)| du \leq nM \int_0^1 u^{n-1} du = M.$$

Par conséquent, F_n est bornée par le même nombre M sur $[-A, A]$. Le cas $A = 0$ est inclus, puisque $F_n(0) = f(0)$.

4. Continuité de F_n .

Posons $H(x) = \int_0^x t^{n-1} f(t) dt$. L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$; le théorème fondamental de l'analyse donne $H'(x) = x^{n-1} f(x)$. En particulier, H est continue. Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la formule $F_n(x) = nx^{-n} H(x)$ montre donc que F_n est continue.

Il reste à vérifier la continuité en 0. À l'aide de (R) et de $n \int_0^1 u^{n-1} du = 1$,

$$|F_n(x) - f(0)| \leq n \int_0^1 u^{n-1} |f(xu) - f(0)| du \leq \sup_{|t| \leq |x|} |f(t) - f(0)|.$$

La continuité de f en 0 implique que ce dernier majorant tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 0$: pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes du supremum sont au plus ε dès que $|x|$ est assez petit. Ainsi $F_n(x) \rightarrow f(0) = F_n(0)$.

La fonction F_n est continue sur toute la droite : $F_n \in E_0$.

5. a) Limite nulle à l'infini.

Supposons d'abord $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $R > 0$ tel que $|f(t)| \leq \varepsilon$ pour $t \geq R$. Pour $x \geq R$, on décompose l'intégrale comme suggéré :

$$F_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^R t^{n-1} f(t) dt + \frac{n}{x^n} \int_R^x t^{n-1} f(t) dt.$$

La constante $C_R = \int_0^R t^{n-1} |f(t)| dt$ est finie. Ainsi :

$$|F_n(x)| \leq \frac{nC_R}{x^n} + \frac{n\varepsilon}{x^n} \int_R^x t^{n-1} dt = \frac{nC_R}{x^n} + \varepsilon \left(1 - \frac{R^n}{x^n}\right) \leq \frac{nC_R}{x^n} + \varepsilon.$$

Comme $n \geq 1$, le premier terme tend vers 0. Pour obtenir une majoration par un nombre arbitraire $\eta > 0$, on applique le raisonnement avec $\varepsilon = \eta/2$, puis on choisit x assez grand pour que $nC_R/x^n \leq \eta/2$. On conclut que $F_n(x) \rightarrow 0$ à $+\infty$.

Pour $-\infty$, posons $g(y) = f(-y)$ et notons G_n la fonction obtenue à partir de g . La

représentation (R) donne $G_n(y) = F_n(-y)$. Si $f(x) \rightarrow 0$ à $-\infty$, alors $g(y) \rightarrow 0$ à $+\infty$. Le résultat précédent appliqué à g entraîne $G_n(y) \rightarrow 0$, donc $F_n(x) \rightarrow 0$ à $-\infty$.

5. b) Limite réelle quelconque.

Supposons que f tende vers $\lambda \in \mathbb{R}$ à l'une des deux extrémités de la droite. La fonction continue $f - \lambda$ tend alors vers 0 à cette même extrémité.

La construction est linéaire et conserve les constantes, comme le montre (R). La fonction associée à $f - \lambda$ est donc $F_n - \lambda$. D'après 5. a), elle tend vers 0.

Ainsi, aussi bien à $+\infty$ qu'à $-\infty$, une limite réelle λ de f est également la limite de F_n .

5. c) Limite égale à $+\infty$.

Supposons d'abord $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Fixons $K > 0$. Il existe $R > 0$ tel que $f(t) \geq 2K$ pour tout $t \geq R$. Pour $x \geq R$, le poids t^{n-1} est positif ou nul sur $[R, x]$, d'où :

$$F_n(x) \geq \frac{n}{x^n} \int_0^R t^{n-1} f(t) dt + 2K \left(1 - \frac{R^n}{x^n}\right).$$

Le membre de droite tend vers $2K$. Il est donc supérieur à K pour tout x assez grand. Comme K est arbitraire, $F_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Si $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow -\infty$, on applique ce résultat à $g(y) = f(-y)$. La relation $G_n(y) = F_n(-y)$ donne la même conclusion à $-\infty$. Ainsi la propriété s'étend aux deux sens étudiés en 5. a).

6. Dérivée en dehors de l'origine.

L'intégrande $t^{n-1}f(t)$ étant continue, le théorème fondamental de l'analyse donne la dérivée de $H(x) = \int_0^x t^{n-1}f(t) dt$. Pour $x \neq 0$, on dérive le produit $nx^{-n}H(x)$:

$$F'_n(x) = -n^2 x^{-n-1} H(x) + nx^{-n} x^{n-1} f(x).$$

Comme $nx^{-n}H(x) = F_n(x)$, cette expression devient :

$$F'_n(x) = -\frac{n}{x} F_n(x) + \frac{n}{x} f(x) = \frac{n}{x} (f(x) - F_n(x)).$$

La fonction F_n est donc dérivable en tout point non nul. La division par x est utilisée uniquement sur ce domaine.

Partie II

On suppose maintenant $f \in E_1$, c'est-à-dire f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. La partie I reste applicable.

1. Dérivabilité à l'origine.

La dérivabilité en dehors de 0 est acquise. Pour étudier 0, la dérivabilité de f en ce point permet d'écrire :

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + t\varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

On définit $\varepsilon(0) = 0$. En remplaçant dans (R), on obtient :

$$F_n(x) = f(0) + \frac{n}{n+1}f'(0)x + xR_n(x), \quad R_n(x) = n \int_0^1 u^n \varepsilon(xu) du.$$

Le reste vérifie :

$$|R_n(x)| \leq \frac{n}{n+1} \sup_{|t| \leq |x|} |\varepsilon(t)| \rightarrow 0.$$

Cette estimation justifie directement l'intégration du reste, sans échange automatique de limite et d'intégrale. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{F_n(x) - F_n(0)}{x} = \frac{n}{n+1}f'(0) + R_n(x).$$

La limite existe, et :

$$F'_n(0) = \frac{n}{n+1}f'(0).$$

La fonction F_n est donc dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Classe C^1 et endomorphisme.

Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la formule $F'_n(x) = n(f(x) - F_n(x))/x$ est continue, puisque f et F_n sont continues. Il reste à vérifier la continuité de F'_n en 0.

La question précédente et la dérivabilité de f donnent :

$$F_n(x) = f(0) + \frac{n}{n+1}f'(0)x + o(x), \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x).$$

Par soustraction,

$$f(x) - F_n(x) = \frac{1}{n+1}f'(0)x + o(x).$$

Pour $x \neq 0$, la relation de I. 6 entraîne donc :

$$F'_n(x) = \frac{n}{n+1}f'(0) + o(1) \rightarrow F'_n(0).$$

Ainsi F'_n est continue sur toute la droite et $F_n \in E_1$.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E_1$, la linéarité de l'intégrale donne, pour $x \neq 0$,

$$T_n(af + bg)(x) = aT_n(f)(x) + bT_n(g)(x).$$

En 0, la même identité résulte de $(af + bg)(0) = af(0) + bg(0)$. Comme T_n est linéaire et envoie E_1 dans E_1 , c'est un endomorphisme de E_1 .

3. Injectivité et surjectivité.

Pour l'injectivité, supposons $T_n(f) = F_n = 0$. Alors $F'_n = 0$, et la relation de I. 6 donne $f(x) = F_n(x) + (x/n)F'_n(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$. De plus, $f(0) = F_n(0) = 0$. Le noyau de T_n est donc réduit à la fonction nulle : T_n est injectif.

Pour la surjectivité, on utilise la régularité supplémentaire des fonctions de l'image hors de 0. Si $f \in E_1$, les fonctions f et F_n sont de classe C^1 . Ainsi :

$$F'_n(x) = \frac{n}{x}(f(x) - F_n(x))$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, par les règles de produit et de quotient. Toute fonction de l'image de T_n est donc de classe C^2 en dehors de 0.

Considérons $g(x) = (x-1)|x-1|$. Pour $x < 1$, $g(x) = -(x-1)^2$; pour $x > 1$, $g(x) = (x-1)^2$. Au point 1,

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = |h| \rightarrow 0.$$

Ainsi $g'(1) = 0$, et sur toute la droite $g'(x) = 2|x-1|$, qui est continue. La fonction g appartient donc à E_1 . Cependant,

$$\frac{g'(1+h) - g'(1)}{h} = \frac{2|h|}{h}$$

a pour limite -2 à gauche et 2 à droite. Par conséquent, g' n'est pas dérivable en 1, point non nul. La fonction g ne peut donc pas appartenir à l'image de T_n .

Pour chaque $n \geq 1$, T_n est injectif mais n'est pas surjectif. Aucune comparaison de dimensions finies n'est nécessaire pour ces espaces de fonctions.

4. Fonction de répartition et densité de X_n .

Puisque φ est une densité continue, $\varphi \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$ et :

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt, \quad f'(x) = \varphi(x).$$

L'égalité pour la dérivée suit du théorème fondamental de l'analyse sur les segments, car $f(x) - f(a) = \int_a^x \varphi(t) dt$. Ainsi $f \in E_1$, comme requis.

La relation de I. 6 permet de choisir :

$$h(x) = x^n f(x) - n \int_0^x t^{n-1} f(t) dt.$$

Cette fonction est définie en tout point et $h(0) = 0$. L'intégration par parties sur le segment orienté de 0 à x donne, puisque $n \geq 1$:

$$n \int_0^x t^{n-1} f(t) dt = x^n f(x) - \int_0^x t^n \varphi(t) dt.$$

Par conséquent :

$$h(x) = \int_0^x t^n \varphi(t) dt, \quad h'(x) = x^n \varphi(x).$$

Si n est pair, $h' \geq 0$ sur toute la droite. La fonction h est croissante, avec $h(x) \leq 0$ pour $x < 0$ et $h(x) \geq 0$ pour $x > 0$, puisque $h(0) = 0$.

Si n est impair, $h' \leq 0$ sur $] -\infty, 0]$ et $h' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. La fonction h est décroissante sur le premier intervalle et croissante sur le second ; elle atteint son minimum 0 en 0. Donc $h(x) \geq 0$ pour tout x .

Pour $x \neq 0$,

$$F'_n(x) = \frac{n}{x^{n+1}} h(x).$$

Lorsque n est pair, x^{n+1} a le signe de x , qui est aussi le signe possible de $h(x)$; le quotient est positif ou nul. Lorsque n est impair, $x^{n+1} > 0$ et $h(x) \geq 0$, donc le quotient est encore positif ou nul. En 0, II. 1 donne $F'_n(0) = n\varphi(0)/(n+1) \geq 0$.

Ainsi F_n est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est continue par II. 2. Comme $f(-\infty) = 0$ et $f(+\infty) = 1$, I. 5. b) donne :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1.$$

Ce sont les propriétés d'une fonction de répartition. Plus précisément, la fonction continue :

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varphi(t) dt & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{n}{n+1} \varphi(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est égale à F'_n et est positive ou nulle. Pour tous $a < b$, le théorème fondamental de l'analyse donne :

$$\int_a^b \Phi_n(t) dt = F_n(b) - F_n(a).$$

Les limites de F_n montrent que l'intégrale de Φ_n sur toute la droite converge et vaut 1, et que $F_n(x) = \int_{-\infty}^x \Phi_n(t) dt$. Ainsi F_n est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire X_n admettant la densité Φ_n .

5. Identité des moments tronqués.

On fixe $A \neq 0$ et un entier $1 \leq p < n$. Si $n = 1$, aucun entier ne satisfait ces conditions : la question est alors vide. Pour $n \geq 2$, les fonctions concernées sont de classe C^1 ; toutes les intégrations par parties suivantes se font sur le segment de bornes 0 et A , avec son orientation. Elles restent donc valables pour $A < 0$.

Posons :

$$I = \int_0^A t^p \Phi_n(t) dt, \quad K = \int_0^A t^{p-1} F_n(t) dt.$$

Comme $\Phi_n = F'_n$, une intégration par parties donne :

$$I = A^p F_n(A) - pK.$$

Le terme en 0 est nul puisque $p \geq 1$ et $F_n(0)$ est fini. Par ailleurs, pour $t \neq 0$, I. 6 entraîne :

$$t^p \Phi_n(t) = nt^{p-1}(f(t) - F_n(t)).$$

Cette identité se prolonge aussi en $t = 0$: les deux membres valent 0, y compris pour $p = 1$ puisque $f(0) = F_n(0)$. On peut donc l'intégrer :

$$I = n \int_0^A t^{p-1} f(t) dt - nK = \frac{n}{p} A^p F_p(A) - nK.$$

Ici F_p est défini par la même construction que F_n , avec l'entier $p \geq 1$. En remplaçant $K = (A^p F_n(A) - I)/p$, on obtient :

$$pI = nA^p F_p(A) - nA^p F_n(A) + nI.$$

Puisque $n - p > 0$, il vient :

$$I = \frac{n}{n-p} A^p (F_n(A) - F_p(A)).$$

Pour transformer cette expression, on intègre par parties, pour $q = n$ puis $q = p$:

$$q \int_0^A t^{q-1} f(t) dt = A^q f(A) - \int_0^A t^q \varphi(t) dt.$$

En divisant par A^q , qui est non nul, cela donne :

$$F_q(A) = f(A) - A^{-q} \int_0^A t^q \varphi(t) dt.$$

Par soustraction des expressions correspondant à $q = n$ et $q = p$,

$$A^p(F_n(A) - F_p(A)) = \int_0^A t^p \varphi(t) dt - A^{p-n} \int_0^A t^n \varphi(t) dt.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^A t^p \Phi_n(t) dt &= \frac{n}{n-p} A^p(F_n(A) - F_p(A)) \\ &= \frac{n}{n-p} \left(\int_0^A t^p \varphi(t) dt - A^{p-n} \int_0^A t^n \varphi(t) dt \right). \end{aligned}$$

Rectification typographique de l'énoncé : les parenthèses des deux derniers membres sont fermées explicitement ; la formule mathématique est inchangée.

6. Existence, valeur et limite des moments.

On fixe des entiers $1 \leq p < n$. Pour justifier l'existence des espérances, il faut d'abord contrôler les intégrales de valeurs absolues.

L'hypothèse d'existence de tous les moments de X implique, pour chaque entier $q \geq 1$, la finitude de l'intégrale positive $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2q} \varphi(t) dt$. L'inégalité $|t|^q \leq 1 + |t|^{2q}$ donne alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^q \varphi(t) dt \leq 1 + M_{2q}(X) < +\infty.$$

Les moments d'ordres p et n de X sont donc absolument intégrables. En particulier, pour tout $A \neq 0$,

$$\left| A^{p-n} \int_0^A t^n \varphi(t) dt \right| \leq |A|^{p-n} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^n \varphi(t) dt.$$

Comme $p - n < 0$, ce majorant tend vers 0 lorsque $A \rightarrow +\infty$ ou $A \rightarrow -\infty$. Le terme supplémentaire de II. 5 disparaît donc dans les deux sens.

En faisant d'abord tendre A vers $+\infty$ dans cette identité, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} t^p \Phi_n(t) dt = \frac{n}{n-p} \int_0^{+\infty} t^p \varphi(t) dt < +\infty.$$

Cela établit la convergence de l'intégrale positive sur la demi-droite positive. Pour la demi-droite négative, si $A < 0$,

$$\int_A^0 |t|^p \Phi_n(t) dt = (-1)^{p+1} \int_0^A t^p \Phi_n(t) dt.$$

En utilisant II. 5 et en faisant tendre A vers $-\infty$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^0 |t|^p \Phi_n(t) dt = \frac{n}{n-p} \int_{-\infty}^0 |t|^p \varphi(t) dt < +\infty.$$

Les intégrales de $|t|^p \Phi_n(t)$ sur les deux demi-droites sont donc finies. Le moment $M_p(X_n) = E(X_n^p)$ existe au sens d'une espérance absolument intégrable.

Pour sa valeur signée, l'identité de II. 5 donne aussi :

$$\int_{-\infty}^0 t^p \Phi_n(t) dt = \frac{n}{n-p} \int_{-\infty}^0 t^p \varphi(t) dt.$$

En ajoutant les deux demi-droites, on conclut :

$$M_p(X_n) = \frac{n}{n-p} M_p(X), \quad 1 \leq p < n.$$

Pour p fixé, cette égalité est valable dès que $n > p$, et :

$$\frac{n}{n-p} = \frac{1}{1-p/n} \rightarrow 1.$$

Ainsi $M_p(X_n) \rightarrow M_p(X)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. La conclusion vaut pour les moments pairs comme pour les moments impairs, sans hypothèse de signe sur $M_p(X)$. Pour $n = 1$, aucun moment d'ordre strictement positif inférieur à n n'est demandé.

7. Limite ponctuelle des fonctions de répartition.

Cette fois, f et x sont fixés, et l'entier n tend vers l'infini. Pour $x = 0$, $F_n(0) = f(0)$ pour tout n : la conclusion est immédiate à ce point.

Méthode 1 — Concentration du poids près de 1.

À partir de (R),

$$F_n(x) - f(x) = n \int_0^1 u^{n-1} (f(xu) - f(x)) du.$$

La fonction f est continue en x . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in]0, 1[$, assez proche de 1, tel que $|f(xu) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour $a \leq u \leq 1$. Comme f est une fonction de répartition, elle prend ses valeurs dans $[0, 1]$, donc $|f(xu) - f(x)| \leq 1$ sur tout $[0, 1]$.

On décompose l'intégrale en $[0, a]$ et $[a, 1]$:

$$|F_n(x) - f(x)| \leq n \int_0^a u^{n-1} du + \varepsilon n \int_a^1 u^{n-1} du = a^n + \varepsilon(1 - a^n) \leq a^n + \varepsilon.$$

Puisque $0 < a < 1$, $a^n \rightarrow 0$. Pour un seuil $\eta > 0$, on choisit $\varepsilon = \eta/2$, puis n assez grand pour que $a^n \leq \eta/2$. Ainsi $F_n(x) \rightarrow f(x)$, aussi bien pour $x > 0$ que pour $x < 0$.

Méthode 2 — Estimation par la densité sur un segment.

Pour $x \neq 0$, l'intégration par parties de II. 4 donne :

$$F_n(x) - f(x) = -\frac{1}{x^n} \int_0^x t^n \varphi(t) dt.$$

La densité φ est continue, donc bornée sur le segment de bornes 0 et x . Posons $L_x = \max_{t \in [\min(0, x), \max(0, x)]} \varphi(t)$, qui est fini et positif ou nul. En tenant compte de l'orientation lorsque $x < 0$,

$$|F_n(x) - f(x)| \leq \frac{L_x}{|x|^n} \int_{\min(0, x)}^{\max(0, x)} |t|^n dt = \frac{L_x |x|}{n+1}.$$

Le majorant tend vers 0, d'où la même conclusion. La première méthode repose seulement sur la continuité au point étudié et la concentration du poids ; la seconde

utilise la densité continue et fournit une borne quantitative.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = f(x).$$

Comme f est continue sur toute la droite, cela établit également la convergence en loi de X_n vers X , par la définition de la convergence en loi aux points de continuité de la fonction de répartition limite.

Relevé des adaptations

- I. 2) La convention $f = 1$ pour $\alpha = 0$ est explicitée, y compris en 0, afin de lever l'ambiguïté de l'écriture $|x|^0$ à l'origine et de conserver une fonction continue.
- II. 5) Les parenthèses manquantes dans la formule du PDF sont rétablies, sans modification de l'identité.