



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

2005

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans ce problème, les variables aléatoires sont réelles et toutes définies sur un même espace probabilisé, d'univers Ω et de probabilité P . La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ représente une suite de variables aléatoires et, pour tout $n \geq 1$, on note

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Si X est une variable aléatoire réelle, $E(X)$ désigne son espérance.

Préliminaires

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, admettant une espérance m et une variance finie. Énoncer, avec précision, la loi faible des grands nombres pour la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.
2. Soit δ un réel strictement positif et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que l'intervalle $]m - \delta, m + \delta[$ soit inclus dans le complémentaire de A . On suppose que les événements considérés sont définis. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \in A\right).$$

L'objet du problème est de préciser de manière quantitative les résultats ci-dessus.

I. Un premier exemple. Le cas gaussien

Dans cette partie, $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Quelle est la loi de $\frac{S_n}{n}$?
2. Soit δ un réel strictement positif. Dans cette partie, on note $\exp$ la fonction exponentielle.

2. a) Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) = 2P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) dt.$$

2. b) En posant $u = n(t - \delta)$, montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - u\delta\right) du.$$

3. a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq 1 - \exp(-x) \leq x$.

3. b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-u\delta) du$ converge et la calculer.

3. c) Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-u\delta) du - \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - u\delta\right) du \right).$$

3. d) En déduire, lorsque n tend vers l'infini, un équivalent de $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right)$.

II. Quelques résultats généraux

À l'instar des variables aléatoires discrètes, on admettra que si X, Y sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes, admettant une espérance, alors XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Soit X une variable aléatoire réelle, discrète ou à densité. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que e^{sX} admette une espérance, on pose

$$\varphi(s) = E(e^{sX}).$$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X .

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(s)$ existe, on a

$$E(e^{sS_n/n}) = (\varphi(s/n))^n.$$

2. Soit Y une variable aléatoire réelle et $s > 0$ tel que $E(e^{sY})$ existe.

2. a) Montrer que, pour tout réel a ,

$$\mathbf{1}_{(Y \geq a)} \leq e^{s(Y-a)},$$

où $\mathbf{1}_{(Y \geq a)}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \geq a\}$.

2. b) En déduire que $P(Y \geq a) \leq e^{-as} E(e^{sY})$.

2. c) Montrer que, pour tout $s > 0$ tel que $\varphi(s/n)$ existe,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-as} (\varphi(s/n))^n.$$

3. Soit Y une variable aléatoire réelle et $s < 0$ tel que $E(e^{sY})$ existe.

3. a) Montrer que, pour tout réel a , $\mathbf{1}_{(Y \leq a)} \leq e^{s(Y-a)}$.

3. b) En déduire que $P(Y \leq a) \leq e^{-as} E(e^{sY})$, puis que, pour tout $s < 0$ tel que $\varphi(s/n)$ existe,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-as} (\varphi(s/n))^n.$$

III. Un second exemple. Le cas binomial

Dans cette partie, $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$. On rappelle que $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = 0) = 1 - p = q$.

1. Calculer $\varphi : s \mapsto \varphi(s)$ et déterminer son domaine de définition.

Soit a un réel fixé de $]0, 1[$.

2. On suppose dans cette question que $a > p$.

2. a) Étudier sur $\mathbb{R}_+$ les variations de la fonction ℓ_a définie par

$$\ell_a(s) = as - \ln \varphi(s).$$

2. b) Montrer que la fonction ℓ_a atteint sur $\mathbb{R}_+$ un maximum strictement positif $h(a, p)$ que l'on exprimera en fonction de a et p .

Dans la suite de cette partie, on utilisera l'expression obtenue pour $h(a, p)$ pour tous les réels $a \in]0, 1[$.

2. c) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n \sup_{t>0} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a, p)}.$$

3. On suppose dans cette question que $a < p$, donc $1 - a > 1 - p$.

3. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $n - S_n$.

3. b) Montrer que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nh(1-a, 1-p)} = e^{-nh(a, p)}.$$

4. Soit $0 < \varepsilon < \min(p, 1 - p)$. Dédurre des questions précédentes que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n \min(h(p+\varepsilon, p), h(p-\varepsilon, p))}.$$

5. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que, pour n assez grand, il est toujours possible de trouver deux réels a_1, a_2 tels que $0 < a_1 < p < a_2 < 1$ qui vérifient les inégalités

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a_1\right) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad P\left(\frac{S_n}{n} \geq a_2\right) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

On pourra étudier les variations de la fonction $a \mapsto h(a, p)$.

6. Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion p , avec $0 < p < 1$, d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p . Pour cela, il teste la machine et prélève un échantillon de $n \geq 1$ objets qu'il analyse. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième objet prélevé est défectueux,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose que, dans ces conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

6. a) Montrer que $F_n = \frac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de p .
6. b) Calculer $V(F_n)$ et déterminer sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$. En déduire que F_n est un estimateur convergent de p .
7. On souhaite déterminer un intervalle de confiance asymptotique du paramètre inconnu p , au niveau de confiance $1 - \alpha$, où $\alpha \in]0, 1[$, à partir de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.
7. a) Quelle est la limite en loi de la suite

$$\left(\sqrt{n} \frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right)_{n \geq 1} ?$$

7. b) Soit f_n la réalisation de F_n sur l'échantillon considéré. Soit t_α le réel défini par $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Déterminer, en fonction de n, f_n, t_α , un intervalle $[U_n, V_n]$ de confiance asymptotique de p au niveau $1 - \alpha$, en résolvant l'inégalité

$$n(f_n - p)^2 \leq t_\alpha^2 p(1 - p).$$

IV. Le cas général

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f . Pour tout réel t tel que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u) du \text{ converge, on note}$$

$$L_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u) du.$$

On suppose que L_X est défini sur un intervalle $] \alpha, \beta[$ contenant 0.

1. Soit $t \in] \alpha, \beta[$ et $\delta > 0$ tel que $[t - \delta, t + \delta] \subset] \alpha, \beta[$.

1. a) Montrer que, pour tout réel u ,

$$|e^{\delta u} - 1 - \delta u| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^n |u|^n}{n!}.$$

1. b) Montrer que, pour tout réel u ,

$$e^{tu} |e^{\delta u} - 1 - \delta u| f(u) \leq (e^{(t-\delta)u} + e^{(t+\delta)u}) f(u).$$

1. c) En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) du$ converge absolument, puis que X admet une espérance m .

2. Soit $t \in] \alpha, \beta[$, $\delta > 0$ tel que $[t - \delta, t + \delta] \subset] \alpha, \beta[$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |h| < \delta$.

2. a) Montrer que, pour tout réel u ,

$$\left| \frac{e^{(t+h)u} - e^{tu}}{h} - u e^{tu} \right| f(u) \leq |h| e^{tu} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta^{n-2} |u|^n}{n!} f(u),$$

puis que

$$\delta^2 \left| \frac{e^{(t+h)u} - e^{tu}}{h} - ue^{tu} \right| f(u) \leq |h| e^{tu} e^{\delta|u|} f(u).$$

2. b) Montrer que L_X est dérivable en t et que

$$L'_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{tu} f(u) du.$$

On admet que la fonction L_X est de classe C^2 sur $] \alpha, \beta[$ et que, pour tout $t \in] \alpha, \beta[$, l'intégrale suivante converge et vérifie

$$L''_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{tu} f(u) du.$$

3. On note $\psi(t) = \ln L_X(t)$.

3. a) Donner le domaine de définition de la fonction ψ sur l'intervalle considéré.

3. b) Calculer ψ' et ψ'' , dérivées première et seconde de ψ .

3. c) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que ψ' est strictement croissante sur $] \alpha, \beta[$. En déduire que ψ' admet en α , respectivement en β , une limite finie ou infinie, notée $L_1(\alpha)$, respectivement $L_1(\beta)$. Quelle est la valeur de $\psi'(0)$?

3. d) Montrer que ψ admet en α , respectivement en β , une limite finie ou infinie, notée $L_0(\alpha)$, respectivement $L_0(\beta)$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in] \alpha, \beta[$, on pose $\ell_a(t) = at - \psi(t)$. Dresser le tableau de variations de ℓ_a , en distinguant les trois cas $a \geq L_1(\beta)$, $a \leq L_1(\alpha)$ et $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$.

5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$h(a) = \sup_{t \in]\alpha, \beta[} \ell_a(t),$$

avec la possibilité $h(a) = +\infty$ et la convention $e^{-n \cdot (+\infty)} = 0$.

Dans cette question seulement, on suppose que $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$. Montrer que

$$h(a) = a(\psi')^{-1}(a) - \psi((\psi')^{-1}(a)).$$

6. Montrer que, si $a > m$,

$$h(a) = \sup_{t \in]0, \beta[} (at - \psi(t)),$$

puis que, si $a < m$,

$$h(a) = \sup_{t \in]\alpha, 0]} (at - \psi(t)).$$

7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

Montrer que, si $a > m$,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-nh(a)},$$

puis que, si $a < m$,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nh(a)}.$$

8. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n \min(h(m-\varepsilon), h(m+\varepsilon))}.$$