



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

2005

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaires

1. Question adaptée au programme actuel. L'indépendance et l'existence d'une variance finie sont précisées dans l'énoncé adapté. Sans indépendance, l'affirmation n'est pas vraie en général : si tous les X_n sont égaux à une même variable de Bernoulli non constante, leur moyenne reste cette variable.

La loi faible des grands nombres affirme que, pour une suite de variables indépendantes de même loi, d'espérance m et de variance finie σ^2 , la moyenne S_n/n converge en probabilité vers m . Cela signifie exactement que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

On peut ici retrouver le résultat par Bienaymé-Tchebychev. L'indépendance donne $E(S_n/n) = m$ et $V(S_n/n) = \sigma^2/n$, donc

$$P \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Cette formulation reste valable lorsque $\sigma^2 = 0$: la moyenne vaut alors m presque sûrement.

2. Tout élément de A est à distance au moins δ de m . Ainsi,

$$\left\{ \frac{S_n}{n} \in A \right\} \subset \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \delta \right\}.$$

Par croissance des probabilités et par la question précédente,

$$0 \leq P \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) \leq P \left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \delta \right) \rightarrow 0.$$

La limite demandée est donc 0. La précision relative aux événements évite de supposer que toute partie arbitraire de $\mathbb{R}$ définit automatiquement un événement.

I. Un premier exemple. Le cas gaussien

1. La somme de variables normales indépendantes est normale. Les espérances s'ajoutent, ainsi que les variances grâce à l'indépendance : S_n suit la loi $\mathcal{N}(0, n)$. Une transformation affine d'une variable normale reste normale, d'où

$$\frac{S_n}{n} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

La seconde composante est ici la variance. En particulier, la densité de cette moyenne est

$$t \mapsto \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. a) Posons $Y_n = S_n/n$. Sa densité est paire ; les événements $\{Y_n \geq \delta\}$ et $\{Y_n \leq -\delta\}$ ont donc la même probabilité. Ils sont disjoints puisque $\delta > 0$, et leur réunion est $\{|Y_n| \geq \delta\}$. Par conséquent,

$$P(|Y_n| \geq \delta) = 2P(Y_n \geq \delta) = 2 \int_{\delta}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) dt.$$

Cela donne la formule demandée avec le coefficient $\sqrt{2n/\pi}$. L'intégrale converge puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une densité sur un intervalle.

2. b) Effectuons d'abord le changement de variable sur $[\delta, R]$, avec $R > \delta$. L'application $u = n(t - \delta)$ est affine, strictement croissante, et donne

$$t = \delta + \frac{u}{n}, \quad dt = \frac{du}{n}, \quad \frac{nt^2}{2} = \frac{n\delta^2}{2} + \delta u + \frac{u^2}{2n}.$$

Les bornes deviennent 0 et $n(R - \delta)$. En faisant ensuite tendre R vers $+\infty$, on obtient

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2n} - \delta u\right) du.$$

L'intégrale transformée converge aussi directement par comparaison avec $e^{-\delta u}$, dont l'intégrale sera calculée en I.3.b.

3. a) Méthode 1 — Intégration d'une inégalité.

Pour $x \geq 0$, la fonction e^{-t} est comprise entre 0 et 1 sur $[0, x]$. Par positivité et croissance de l'intégrale,

$$0 \leq 1 - e^{-x} = \int_0^x e^{-t} dt \leq \int_0^x 1 dt = x.$$

La conclusion comprend le cas $x = 0$, où les deux bornes sont égales.

Méthode 2 — Convexité et tangente.

La fonction exponentielle est convexe car sa dérivée seconde est positive. Son graphe est au-dessus de sa tangente en 0, donc $e^y \geq 1 + y$ pour tout réel y . En prenant $y = -x$, on obtient $1 - e^{-x} \leq x$. Comme $x \geq 0$ implique $e^{-x} \leq 1$, la borne inférieure est également vérifiée.

La première méthode fournit une borne par intégration ; la seconde est utile lorsque l'on reconnaît une fonction convexe et sa tangente.

3. b) Pour $R > 0$, une primitive de $e^{-\delta u}$ est $-e^{-\delta u}/\delta$, puisque $\delta > 0$. Ainsi,

$$\int_0^R e^{-\delta u} du = \frac{1 - e^{-\delta R}}{\delta} \rightarrow \frac{1}{\delta}.$$

L'intégrale converge et vaut $1/\delta$.

3. c) Posons

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-\delta u - u^2/(2n)} du, \quad D_n = \frac{1}{\delta} - J_n.$$

Les intégrales sont convergentes par comparaison avec $e^{-\delta u}$. Leur différence est donc

$$D_n = \int_0^{+\infty} e^{-\delta u} (1 - e^{-u^2/(2n)}) du.$$

Méthode 1 — Une majoration quantitative intégrable.

D'après I.3.a,

$$0 \leq D_n \leq \frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-\delta u} du.$$

Calculons l'intégrale de droite. Sur $[0, R]$, deux intégrations par parties donnent

$$\int_0^R u^2 e^{-\delta u} du = -\frac{R^2 e^{-\delta R}}{\delta} + \frac{2}{\delta} \int_0^R u e^{-\delta u} du,$$

$$\int_0^R u e^{-\delta u} du = -\frac{R e^{-\delta R}}{\delta} + \frac{1}{\delta} \int_0^R e^{-\delta u} du.$$

Les termes $R^2 e^{-\delta R}$ et $R e^{-\delta R}$ tendent vers 0 par croissance comparée. Avec I.3.b, on obtient

$$\int_0^{+\infty} u^2 e^{-\delta u} du = \frac{2}{\delta^3}, \quad 0 \leq D_n \leq \frac{1}{n\delta^3}.$$

Par encadrement, $D_n \rightarrow 0$.

Méthode 2 — Séparation d'un segment et d'une queue d'intégrale.

Fixons $R > 0$. Sur $[0, R]$, I.3.a donne $1 - e^{-u^2/(2n)} \leq R^2/(2n)$. Sur $[R, +\infty[$, cette différence est au plus 1. Il en résulte

$$0 \leq D_n \leq \frac{R^2}{2n\delta} + \frac{e^{-\delta R}}{\delta}.$$

Étant donné $\eta > 0$, choisissons R assez grand pour que le second terme soit inférieur à $\eta/2$, puis n assez grand pour que le premier soit inférieur à $\eta/2$. Alors $D_n < \eta$, ce qui prouve encore $D_n \rightarrow 0$.

La première méthode donne une vitesse explicite ; la seconde sépare les deux difficultés, la convergence sur un segment et le contrôle de la queue. Aucune des deux n'échange une limite et une intégrale.

3. d) La question précédente donne $J_n \rightarrow 1/\delta$, limite strictement positive. Ainsi, $J_n \sim 1/\delta$. En utilisant I.2.b et en prenant le quotient par l'expression proposée,

$$\frac{P(|S_n/n| \geq \delta)}{\frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2}{n\pi}} e^{-n\delta^2/2}} = \delta J_n \rightarrow 1.$$

Donc

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \delta\right) \sim \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right).$$

II. Quelques résultats généraux

1. Il faut d'abord vérifier que $\varphi(s/n)$ existe sous l'hypothèse de l'énoncé, qui porte sur $\varphi(s)$. Pour tout $v \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$, on a

$$0 < e^{v/n} \leq 1 + e^v.$$

En effet, pour $v \leq 0$, le membre de gauche est au plus 1 ; pour $v \geq 0$, il est au plus e^v . En appliquant cette inégalité à $v = sX$, l'existence de $E(e^{sX})$ entraîne celle de $E(e^{sX/n})$ par domination.

Les variables $e^{sX_i/n}$ sont mutuellement indépendantes, car chacune est une fonction de X_i . Elles sont positives et intégrables. La factorisation de l'espérance des produits indépendants, itérée avec le lemme des coalitions, donne

$$E(e^{sS_n/n}) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{sX_i/n}\right) = \prod_{i=1}^n E(e^{sX_i/n}) = (\varphi(s/n))^n.$$

Elle justifie en même temps l'intégrabilité du produit. Pour $s = 0$, tous les facteurs valent 1 et la formule reste vraie. Le même raisonnement montre que la condition plus faible « $\varphi(s/n)$ existe » suffit pour cette identité ; c'est cette forme que l'on utilisera ensuite.

2. a) Fixons $\omega \in \Omega$. Si $Y(\omega) \geq a$, alors $s(Y(\omega) - a) \geq 0$, puisque $s > 0$, donc $e^{s(Y(\omega)-a)} \geq 1$. Si $Y(\omega) < a$, l'indicatrice vaut 0 et l'exponentielle est positive. Dans les deux cas,

$$\mathbf{1}_{(Y \geq a)} \leq e^{s(Y-a)}.$$

2. b) Méthode 1 — Espérance de l'inégalité précédente.

L'indicatrice est intégrable, et $e^{s(Y-a)} = e^{-as}e^{sY}$ l'est par hypothèse. Par croissance et linéarité de l'espérance,

$$P(Y \geq a) = E(\mathbf{1}_{(Y \geq a)}) \leq E(e^{s(Y-a)}) = e^{-as} E(e^{sY}).$$

Méthode 2 — Inégalité de Markov.

La variable e^{sY} est positive et intégrable ; le seuil e^{sa} est strictement positif. Comme l'exponentielle composée avec la multiplication par $s > 0$ est croissante,

$$\{Y \geq a\} = \{e^{sY} \geq e^{sa}\}.$$

Markov donne directement $P(Y \geq a) \leq E(e^{sY})/e^{sa}$. Cette méthode met en évidence le principe : appliquer Markov à une transformation exponentielle plutôt qu'à la variable initiale.

2. c) Appliquons II.2.b à $Y = S_n/n$. Pour $s > 0$ tel que $\varphi(s/n)$ existe, II.1, dans sa forme démontrée ci-dessus, assure l'intégrabilité requise. Il vient

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-as} E(e^{sS_n/n}) = e^{-as} (\varphi(s/n))^n.$$

Cette borne est valable pour chaque paramètre admissible $s > 0$; on pourra ensuite choisir celui qui la rend la plus petite.

3. a) Si $Y(\omega) \leq a$, alors $s(Y(\omega) - a) \geq 0$, car $s < 0$. L'exponentielle est donc au moins 1. Si $Y(\omega) > a$, l'indicatrice est nulle. Ainsi,

$$\mathbf{1}_{(Y \leq a)} \leq e^{s(Y-a)}.$$

3. b) Les deux membres sont intégrables. En prenant leurs espérances,

$$P(Y \leq a) \leq e^{-as} E(e^{sY}).$$

La même conclusion peut être obtenue par Markov : pour $s < 0$, l'événement $\{Y \leq a\}$ est précisément $\{e^{sY} \geq e^{sa}\}$, et Markov s'applique à la variable positive intégrable e^{sY} au seuil $e^{sa} > 0$.

Avec $Y = S_n/n$ et $\varphi(s/n)$ finie, II.1 permet donc de conclure que

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-as} (\varphi(s/n))^n.$$

III. Un second exemple. Le cas binomial

1. La variable X prend uniquement les valeurs 0 et 1. Le transfert, ici une somme finie, donne pour tout réel s

$$\varphi(s) = qe^{s \cdot 0} + pe^{s \cdot 1} = q + pe^s.$$

Cette quantité est finie et strictement positive pour tout $s \in \mathbb{R}$. Le domaine de définition de φ est donc $\mathbb{R}$.

2. a) Les fonctions utilisées sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $q + pe^s > 0$. Pour $s \geq 0$,

$$\ell'_a(s) = a - \frac{pe^s}{q + pe^s} = \frac{aq - p(1-a)e^s}{q + pe^s}.$$

Comme $0 < a < 1$, le numérateur s'annule exactement pour

$$s_a = \ln \left(\frac{aq}{p(1-a)} \right).$$

L'hypothèse $a > p$ équivaut à $aq > p(1-a)$, donc $s_a > 0$. Le numérateur est positif pour $s < s_a$ et négatif pour $s > s_a$. Ainsi, ℓ_a est strictement croissante sur $[0, s_a]$, puis strictement décroissante sur $[s_a, +\infty[$.

On a $\ell_a(0) = 0$. Pour la limite à l'infini, écrivons

$$\ell_a(s) = (a-1)s - \ln p - \ln \left(1 + \frac{q}{p}e^{-s} \right).$$

Comme $a < 1$, cette expression tend vers $-\infty$. Le tableau est donc :

s	0	s_a	$+\infty$
Signe de ℓ'_a	+	0	—
Variation de ℓ_a	0	maximum	$-\infty$

Dans la ligne du signe, les signes + et — décrivent les intervalles situés de part et d'autre de s_a .

2. b) Le maximum est atteint en s_a . Il est strictement positif, puisque ℓ_a croît strictement entre 0 et $s_a > 0$ et que $\ell_a(0) = 0$.

La relation $e^{s_a} = aq/(p(1-a))$ donne

$$\varphi(s_a) = q + p \frac{aq}{p(1-a)} = \frac{q}{1-a}.$$

Par substitution,

$$\ell_a(s_a) = a \ln \left(\frac{aq}{p(1-a)} \right) - \ln \left(\frac{q}{1-a} \right).$$

En regroupant les logarithmes,

$$h(a, p) = a \ln \left(\frac{a}{p} \right) + (1-a) \ln \left(\frac{1-a}{q} \right) > 0.$$

C'est le maximum demandé pour $a > p$. La même expression définit $h(a, p)$ pour tout $a \in]0, 1[$, même lorsque $a \leq p$; sa positivité hors de $a = p$ sera vérifiée en III.5.

2. c) Dans II.2.c, prenons $s = nt$ avec $t > 0$. Tous ces paramètres sont admissibles d'après III.1. On obtient

$$P \left(\frac{S_n}{n} \geq a \right) \leq e^{-nat} \varphi(t)^n = e^{-n(at - \ln \varphi(t))} = e^{-n\ell_a(t)}.$$

La fonction $x \mapsto e^{-nx}$ étant décroissante, minimiser cette borne revient à maximiser ℓ_a . D'après III.2.a-b, le maximum sur $t > 0$ est atteint en $s_a > 0$ et vaut $h(a, p)$. Par conséquent,

$$P \left(\frac{S_n}{n} \geq a \right) \leq e^{-n \sup_{t>0} (at - \ln \varphi(t))} = e^{-nh(a, p)}.$$

3. a) Pour chaque i , la variable $1 - X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $q = 1 - p$. Les variables $1 - X_i$ sont indépendantes, car elles sont des fonctions séparées des variables indépendantes X_i . Or

$$n - S_n = \sum_{i=1}^n (1 - X_i).$$

Par stabilité des sommes de Bernoulli indépendantes de même paramètre, $n - S_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$.

3. b) Méthode 1 — Passage aux objets non défectueux.

Puisque $a < p$, on a $1 - a > q$. De plus,

$$\left\{ \frac{S_n}{n} \leq a \right\} = \left\{ \frac{n - S_n}{n} \geq 1 - a \right\}.$$

Les variables $1 - X_i$ satisfont les hypothèses de III.2.c avec les paramètres q et $1 - a$. Ainsi,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nh(1-a,q)}.$$

La formule de III.2.b donne exactement

$$h(1 - a, q) = (1 - a) \ln\left(\frac{1 - a}{q}\right) + a \ln\left(\frac{a}{1 - q}\right) = h(a, p).$$

On obtient la borne annoncée.

Méthode 2 — Optimisation directe avec un paramètre négatif.

L'expression de ℓ'_a établie en III.2.a reste valable sur $\mathbb{R}$. Pour $a < p$, son unique zéro $s_a = \ln(aq/(p(1 - a)))$ est négatif. Le numérateur est positif pour $s < s_a$ et négatif pour $s > s_a$, donc ℓ_a atteint son maximum sur $] - \infty, 0[$ en s_a .

La substitution de III.2.b, qui ne dépend pas du signe de s_a , donne $\ell_a(s_a) = h(a, p)$. En prenant $s = ns_a < 0$ dans II.3.b, on obtient

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-n\ell_a(s_a)} = e^{-nh(a,p)}.$$

La première méthode exploite la complémentarité propre à la loi binomiale ; la seconde se réutilise pour des lois sans cette symétrie.

4. Question adaptée au programme actuel. La restriction $0 < \varepsilon < \min(p, 1 - p)$ assure que les deux arguments $p - \varepsilon$ et $p + \varepsilon$ appartiennent au domaine $]0, 1[$ de h .

Les deux événements $\{F_n \leq p - \varepsilon\}$ et $\{F_n \geq p + \varepsilon\}$ sont disjoints et leur réunion est $\{|F_n - p| \geq \varepsilon\}$. Les questions III.2.c et III.3.b donnent donc

$$P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq e^{-nh(p-\varepsilon,p)} + e^{-nh(p+\varepsilon,p)}.$$

Chacun des deux termes est majoré par $e^{-n \min(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p))}$. D'où

$$P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n \min(h(p+\varepsilon,p), h(p-\varepsilon,p))}.$$

5. Commençons par étudier h sur $]0, 1[$. La dérivation des deux termes donne

$$\frac{\partial h}{\partial a}(a, p) = \ln\left(\frac{a}{p}\right) - \ln\left(\frac{1-a}{q}\right) = \ln\left(\frac{aq}{p(1-a)}\right).$$

Cette dérivée est négative pour $a < p$, nulle pour $a = p$, et positive pour $a > p$. Ainsi, h décroît strictement sur $]0, p]$ et croît strictement sur $[p, 1[$. Comme $h(p, p) = 0$, on a $h(a, p) > 0$ pour $a \neq p$.

Méthode 1 — Fixer deux seuils puis augmenter la taille de l'échantillon.

Prenons $a_1 = p/2$ et $a_2 = (1+p)/2$. Ils vérifient $0 < a_1 < p < a_2 < 1$. Posons $c = \min(h(a_1, p), h(a_2, p)) > 0$. Pour tout entier n vérifiant

$$n \geq \frac{\ln(2/\alpha)}{c},$$

les majorations de III.2.c et III.3.b donnent

$$P(F_n \leq a_1) \leq e^{-nc} \leq \frac{\alpha}{2}, \quad P(F_n \geq a_2) \leq e^{-nc} \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Cette construction suffit à établir l'existence demandée.

Méthode 2 — Choisir des seuils dépendant de la taille de l'échantillon.

Par croissance comparée, $a \ln a \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow 0^+$, et $(1-a) \ln(1-a) \rightarrow 0$ lorsque $a \rightarrow 1^-$. On en déduit

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} h(a, p) = -\ln q > 0, \quad \lim_{a \rightarrow 1^-} h(a, p) = -\ln p > 0.$$

Posons $c_n = \ln(2/\alpha)/n$. Pour n assez grand,

$$0 < c_n < \min(-\ln q, -\ln p).$$

La continuité et les variations de h assurent l'existence d'un unique $a_1 \in]0, p[$ et d'un unique $a_2 \in]p, 1[$ tels que $h(a_1, p) = h(a_2, p) = c_n$. Les deux bornes exponentielles valent alors $e^{-nc_n} = \alpha/2$.

La première méthode donne un choix immédiat de seuils; la seconde calibre les seuils avec n . Pour $n \rightarrow +\infty$, ces seuils se rapprochent de p : pour tout $\eta \in]0, \min(p, q)[$, la positivité de $h(p - \eta, p)$ et de $h(p + \eta, p)$ impose finalement $p - \eta < a_1 < p < a_2 < p + \eta$.

6. a) L'estimateur F_n est une fonction de l'échantillon qui ne dépend pas du paramètre inconnu dans sa définition. Chaque X_i est bornée, donc intégrable, et $E(X_i) = p$. Par linéarité,

$$E(F_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{np}{n} = p.$$

L'estimateur F_n est donc sans biais.

6. b) Question adaptée au programme actuel. La demande portant sur le risque quadratique est remplacée par le calcul de la variance et l'étude de la convergence de l'estimateur.

Les X_i admettent une variance puisqu'elles sont bornées. Leur indépendance donne

$$V(F_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Cette variance tend vers 0. Avec $E(F_n) = p$, Bienaymé-Tchebychev donne, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Ainsi, F_n converge en probabilité vers p : c'est un estimateur convergent.

7. a) Les variables X_i sont indépendantes de même loi, d'espérance p et de variance $p(1-p)$ finie et strictement positive, puisque $0 < p < 1$. Le théorème limite central s'applique et donne

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \sqrt{n} \frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

7. b) Question adaptée au programme actuel. On construit un intervalle asymptotique en inversant l'inégalité issue de III.7.a, sans substituer un estimateur au paramètre dans la convergence en loi.

Comme $0 < \alpha < 1$, le nombre t_α est bien défini, fini et strictement positif. Par symétrie de la loi normale,

$$\Phi(-t_\alpha) = \frac{\alpha}{2}, \quad \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 1 - \alpha.$$

La convergence en loi de Z_n entraîne

$$P(-t_\alpha \leq Z_n \leq t_\alpha) \longrightarrow 1 - \alpha.$$

Pour justifier le choix des bornes incluses même si Z_n est discrète, on encadre cette probabilité, pour tout $\eta > 0$ assez petit, par $P(-t_\alpha < Z_n \leq t_\alpha)$ et $P(-t_\alpha - \eta < Z_n \leq t_\alpha)$. Les fonctions de répartition convergent à ces bornes ; on fait ensuite tendre η vers 0 en utilisant la continuité de Φ .

Puisque $p(1-p) > 0$, l'événement central équivaut exactement à

$$n(F_n - p)^2 \leq t_\alpha^2 p(1-p).$$

Pour une réalisation $f = f_n \in [0, 1]$, posons $c = t_\alpha^2 > 0$. L'inégalité à résoudre s'écrit

$$(n+c)p^2 - (2nf+c)p + nf^2 \leq 0.$$

Le discriminant de ce polynôme réel du second degré vaut

$$D = (2nf+c)^2 - 4(n+c)nf^2 = c^2 + 4ncf(1-f) > 0.$$

Il s'agit ici du calcul des racines d'un polynôme réel, sans recours à un déterminant matriciel. Son coefficient dominant est positif ; l'inégalité est donc satisfaite entre les deux racines :

$$U_n = \frac{2nf_n + t_\alpha^2 - \sqrt{t_\alpha^4 + 4nt_\alpha^2 f_n(1 - f_n)}}{2(n + t_\alpha^2)},$$

$$V_n = \frac{2nf_n + t_\alpha^2 + \sqrt{t_\alpha^4 + 4nt_\alpha^2 f_n(1 - f_n)}}{2(n + t_\alpha^2)}.$$

Vérifions que ces bornes sont dans $[0, 1]$. La différence $(2nf + c)^2 - D$ vaut $4n(n + c)f^2 \geq 0$, donc $2nf + c \geq \sqrt{D}$ et $U_n \geq 0$. De même,

$$(2n(1 - f) + c)^2 - D = 4n(n + c)(1 - f)^2 \geq 0,$$

ce qui donne $V_n \leq 1$. Les racines sont ordonnées puisque $D > 0$. Aux cas limites, si $f_n = 0$, l'intervalle est $[0, c/(n + c)]$; si $f_n = 1$, il est $[n/(n + c), 1]$.

En remplaçant f_n par la variable F_n dans les deux formules, on définit les bornes aléatoires avant observation. Pour tout paramètre fixé $p \in]0, 1[$, l'événement « p appartient à cet intervalle » est exactement l'événement central étudié ci-dessus. Sa probabilité tend donc vers $1 - \alpha$.

L'intervalle observé $[U_n, V_n]$, appelé intervalle de Wilson, est ainsi un intervalle de confiance asymptotique au niveau $1 - \alpha$. Le raisonnement ne garantit pas une couverture exactement égale à $1 - \alpha$ pour chaque taille finie n .

IV. Le cas général

1. a) La série exponentielle est autorisée et converge absolument pour tout réel v . Avec $v = \delta u$, elle donne

$$e^{\delta u} - 1 - \delta u = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\delta^k u^k}{k!}.$$

L'inégalité triangulaire sur chaque somme partielle, suivie du passage à la limite dans ces séries convergentes, donne

$$|e^{\delta u} - 1 - \delta u| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\delta^k |u|^k}{k!}.$$

Aucune intégration de série n'intervient dans cette étape.

1. b) Le membre de droite de IV.1.a est inférieur à $e^{\delta|u|}$, puisqu'il est une partie d'une série à termes positifs dont la somme complète vaut $e^{\delta|u|}$. Or, selon le signe de u , cette exponentielle vaut $e^{\delta u}$ ou $e^{-\delta u}$; dans les deux cas,

$$e^{\delta|u|} \leq e^{\delta u} + e^{-\delta u}.$$

Comme $e^{tu} f(u) \geq 0$, la multiplication conserve les inégalités et donne

$$e^{tu} |e^{\delta u} - 1 - \delta u| f(u) \leq (e^{(t+\delta)u} + e^{(t-\delta)u}) f(u).$$

Les deux termes de droite ont une intégrale convergente, puisque $t - \delta$ et $t + \delta$ appartiennent à l'intervalle de définition de L_X .

1. c) Il faut établir la convergence absolue, car l'intégrande $ue^{tu}f(u)$ peut changer de signe.

Méthode 1 — Utiliser le reste contrôlé en IV.1.b.

L'identité $\delta u = e^{\delta u} - 1 - (e^{\delta u} - 1 - \delta u)$ et l'inégalité triangulaire donnent

$$\delta|u| \leq e^{\delta u} + 1 + |e^{\delta u} - 1 - \delta u|.$$

En multipliant par $e^{tu}f(u)$ et en utilisant IV.1.b,

$$\delta|u|e^{tu}f(u) \leq (2e^{(t+\delta)u} + e^{tu} + e^{(t-\delta)u})f(u).$$

Les trois intégrales de droite sont finies, et $\delta > 0$. Par comparaison sur chacune des deux demi-droites, l'intégrale de $|u|e^{tu}f(u)$ converge.

Méthode 2 — Domination directe par des exponentielles.

Pour $v \geq 0$, la série exponentielle donne $v \leq e^v$. Ainsi,

$$\delta|u|e^{tu}f(u) \leq e^{tu}e^{\delta|u|}f(u) \leq (e^{(t+\delta)u} + e^{(t-\delta)u})f(u).$$

Cette majoration intégrable établit encore la convergence absolue de l'intégrale demandée. La première méthode exploite la question précédente ; la seconde est un outil direct pour contrôler un facteur polynomial par des exponentielles voisines.

Enfin, $0 \in]\alpha, \beta[$. En appliquant le résultat à $t = 0$, avec un $\delta > 0$ assez petit, on obtient

$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|f(u) du < +\infty$. La variable X admet donc l'espérance

$$m = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u) du.$$

2. a) Question adaptée au programme actuel. L'incrément vérifie $0 < |h| < \delta$, car le quotient n'est pas défini pour $h = 0$.

Pour $h \neq 0$, la série exponentielle donne, pour chaque réel u ,

$$\frac{e^{hu} - 1}{h} - u = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{h^{k-1}u^k}{k!}.$$

Cette série converge absolument. L'inégalité triangulaire et la majoration

$|h|^{k-1} = |h||h|^{k-2} \leq |h|\delta^{k-2}$ entraînent

$$\left| \frac{e^{hu} - 1}{h} - u \right| \leq |h| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\delta^{k-2}|u|^k}{k!}.$$

En multipliant par $e^{tu}f(u) \geq 0$, on obtient la première inégalité demandée. Après multiplication par δ^2 ,

$$\delta^2 \left| \frac{e^{(t+h)u} - e^{tu}}{h} - ue^{tu} \right| f(u) \leq |h|e^{tu} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\delta^k |u|^k}{k!} f(u).$$

La somme de droite est au plus $e^{\delta|u|}$. On conclut que

$$\delta^2 \left| \frac{e^{(t+h)u} - e^{tu}}{h} - ue^{tu} \right| f(u) \leq |h|e^{tu}e^{\delta|u|} f(u).$$

2. b) Pour $0 < |h| < \delta$, les paramètres t et $t + h$ appartiennent à $] \alpha, \beta[$. Les intégrales définissant $L_X(t)$ et $L_X(t + h)$ convergent ; IV.1.c assure aussi la convergence absolue de l'intégrale notée

$$M_t = \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) du.$$

La linéarité des intégrales convergentes permet donc d'écrire leur différence. Puis l'inégalité intégrale et IV.2.a donnent

$$\left| \frac{L_X(t + h) - L_X(t)}{h} - M_t \right| \leq \frac{|h|}{\delta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} e^{\delta|u|} f(u) du.$$

Pour chaque réel u , l'intégrande de droite est au plus $(e^{(t+\delta)u} + e^{(t-\delta)u}) f(u)$. Ainsi,

$$\left| \frac{L_X(t + h) - L_X(t)}{h} - M_t \right| \leq \frac{|h|}{\delta^2} (L_X(t + \delta) + L_X(t - \delta)).$$

Le coefficient de $|h|$ est fini et indépendant de h . La borne tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$, ce qui prouve directement la dérivabilité en t et la formule

$$L'_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{tu} f(u) du.$$

Il ne s'agit pas d'invoquer un théorème de dérivation sous l'intégrale : le passage à la limite du quotient est établi par une majoration explicite de son erreur.

Résultat admis dans cette version adaptée.

Comme dans le sujet original, on admet que L_X est de classe C^2 sur $] \alpha, \beta[$ et que, pour tout t de cet intervalle, l'intégrale suivante converge et vérifie

$$L''_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{tu} f(u) du.$$

Ce résultat permettra de calculer ψ'' et d'établir sa stricte positivité. Son intégrande est positif ; sa convergence est donc aussi absolue.

3. a) Pour chaque $t \in]\alpha, \beta[$, l'intégrale définissant $L_X(t)$ est finie par hypothèse. Elle est strictement positive : la variable e^{tX} est strictement positive et ne peut avoir une espérance nulle.

On peut aussi le vérifier par une minoration. Il existe $R > 0$ tel que $P(|X| \leq R) > 0$, car ces probabilités tendent vers 1 lorsque $R \rightarrow +\infty$. Sur cet événement, $e^{tX} \geq e^{-|t|R}$, donc

$$L_X(t) \geq e^{-|t|R} P(|X| \leq R) > 0.$$

Le logarithme est donc défini sur tout l'intervalle $] \alpha, \beta[$. C'est le domaine retenu pour ψ dans cette partie. L'énoncé ne suppose pas que cet intervalle soit le domaine maximal de convergence de L_X ; aucune conclusion sur des points extérieurs n'est nécessaire.

3. b) Puisque L_X est de classe C^2 et strictement positive, $\psi = \ln L_X$ est de classe C^2 sur $] \alpha, \beta[$. Les règles de dérivation donnent

$$\psi'(t) = \frac{L'_X(t)}{L_X(t)},$$

$$\psi''(t) = \frac{L''_X(t)L_X(t) - (L'_X(t))^2}{L_X(t)^2}.$$

Ces quotients sont définis grâce à la positivité établie en IV.3.a.

3. c) Établissons l'inégalité de Cauchy-Schwarz nécessaire dans ce cadre d'intégrales, sans la supposer connue pour des intégrales impropres.

Fixons $t \in] \alpha, \beta[$ et posons

$$A(u) = e^{tu/2} \sqrt{f(u)}, \quad B(u) = ue^{tu/2} \sqrt{f(u)}.$$

Les intégrales de A^2 , de B^2 et de $|AB|$ convergent, d'après la définition de L_X , le résultat admis après IV.2.b et IV.1.c. Pour tout réel r , la positivité de l'intégrale d'un carré donne

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (B(u) - rA(u))^2 du = L_X''(t) - 2rL_X'(t) + r^2L_X(t).$$

En prenant $r = L_X'(t)/L_X(t)$, choix autorisé puisque $L_X(t) > 0$, on obtient

$$(L_X'(t))^2 \leq L_X(t)L_X''(t).$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les deux fonctions considérées. Toutes les intégrales ont été justifiées avant leur combinaison.

Pour montrer que l'inégalité est stricte, posons $c = L_X'(t)/L_X(t)$ et introduisons la densité

$$g_t(u) = \frac{e^{tu} f(u)}{L_X(t)}.$$

Elle est positive ou nulle, son intégrale vaut 1, et elle conserve la régularité requise d'une densité. Une variable Z_t de cette densité admet un moment d'ordre deux fini, et le transfert donne

$$E(Z_t) = c, \quad E(Z_t^2) = \frac{L_X''(t)}{L_X(t)}.$$

L'égalité dans l'inégalité précédente entraînerait $E((Z_t - c)^2) = 0$. Pour tout entier $k \geq 1$, Markov donnerait alors $P(|Z_t - c| \geq 1/k) = 0$. Par continuité monotone des probabilités,

$P(Z_t \neq c) = 0$. Pourtant une variable à densité vérifie $P(Z_t = c) = 0$, puisque l'intégrale d'une densité sur un singleton est nulle. Cette contradiction exclut l'égalité.

Ainsi,

$$L_X(t)L_X''(t) - (L_X'(t))^2 > 0, \quad \psi''(t) > 0.$$

La dérivée ψ' est donc strictement croissante. Elle possède à chaque extrémité une limite dans les réels étendus, par monotonie :

$$L_1(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \alpha^+} \psi'(t), \quad L_1(\beta) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} \psi'(t).$$

Ces limites vérifient $L_1(\alpha) < L_1(\beta)$, et même $L_1(\alpha) < \psi'(0) < L_1(\beta)$, car 0 est intérieur à l'intervalle et ψ' est strictement croissante.

Enfin, $L_X(0) = \int f(u) du = 1$ et $L_X'(0) = E(X) = m$. Donc

$$\psi'(0) = m.$$

Le calcul montre aussi que $\psi''(t) = V(Z_t) > 0$: la stricte convexité du logarithme de L_X provient de la variance d'une loi à densité.

3. d) La fonction ψ' est continue et strictement croissante. Si elle s'annule en un point t_0 , ce point est unique ; elle est négative à gauche de t_0 et positive à droite. Alors ψ décroît sur $]\alpha, t_0]$ et croît sur $[t_0, \beta[$.

Si ψ' ne s'annule pas, sa continuité sur un intervalle implique qu'elle garde un signe strictement positif ou strictement négatif ; sinon le théorème des valeurs intermédiaires lui donnerait un zéro. Dans ce cas, ψ est monotone sur tout l'intervalle.

Dans toutes les situations, ψ est monotone au voisinage de chacune des extrémités. Elle y possède donc une limite finie ou infinie, que l'on note

$$L_0(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \alpha^+} \psi(t), \quad L_0(\beta) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} \psi(t).$$

Ce raisonnement ne demande aucune opération entre limites infinies.

4. Pour tout $t \in]\alpha, \beta[$,

$$\ell'_a(t) = a - \psi'(t).$$

Étudions le signe de cette dérivée en utilisant la stricte croissance de ψ' .

Premier cas : $a \geq L_1(\beta)$.

Ce cas ne peut se produire pour un réel a si $L_1(\beta) = +\infty$. Lorsqu'il se produit, pour tout t intérieur on a $\psi'(t) < L_1(\beta) \leq a$: choisir un point plus grand que t dans l'intervalle justifie la première inégalité stricte. Ainsi, $\ell'_a(t) > 0$ et ℓ_a est strictement croissante sur tout l'intervalle.

t	α	β
Signe de ℓ'_a sur l'intervalle	+	+
Variation	limite à gauche	↗ limite à droite

Son supremum est sa limite à droite, éventuellement $+\infty$; il n'est pas atteint dans l'intervalle ouvert.

Deuxième cas : $a \leq L_1(\alpha)$.

Ce cas est impossible pour un réel a si $L_1(\alpha) = -\infty$. Sinon, pour tout t intérieur, $\psi'(t) > L_1(\alpha) \geq a$, donc $\ell'_a(t) < 0$. La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle.

t	α	β
Signe de ℓ'_a sur l'intervalle	—	—
Variation	limite à gauche	$\searrow$ limite à droite

Son supremum est sa limite à gauche, éventuellement $+\infty$, et n'est pas atteint dans l'intervalle ouvert.

Troisième cas : $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$.

La fonction ψ' est continue et strictement croissante ; son image est exactement $]L_1(\alpha), L_1(\beta)[$, avec les interprétations usuelles si une extrémité est infinie. Le théorème de la bijection fournit un unique $t_a \in]\alpha, \beta[$ tel que $\psi'(t_a) = a$.

Pour $t < t_a$, $\ell'_a(t) > 0$; pour $t > t_a$, $\ell'_a(t) < 0$. Ainsi,

t	α	t_a	β
Signe de ℓ'_a	+	0	—
Variation	limite à gauche	$\nearrow$ maximum	$\searrow$ limite à droite

Les signes indiquent les intervalles de part et d'autre de t_a . Le maximum global est unique et vaut $\ell_a(t_a)$.

Dans ces tableaux, les valeurs aux extrémités désignent des limites, car les extrémités n'appartiennent pas au domaine. Ces limites existent par la monotonie sur les intervalles concernés ; on ne les écrit pas comme des différences d'expressions potentiellement infinies.

5. Question adaptée au programme actuel. L'hypothèse $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$ est réservée à cette question ; la définition de h reste valable pour tous les réels a , avec une valeur éventuellement infinie.

Dans le troisième cas de IV.4, le maximum est atteint en l'unique point

$$t_a = (\psi')^{-1}(a).$$

La définition du supremum donne donc

$$h(a) = \ell_a(t_a) = a(\psi')^{-1}(a) - \psi((\psi')^{-1}(a)).$$

Cette valeur est finie puisque t_a appartient au domaine de ψ .

Pour tout réel a , indépendamment de l'hypothèse de cette question, $\ell_a(0) = -\psi(0) = 0$, car $L_X(0) = 1$. Par conséquent, $h(a) \geq 0$; le seul cas infini possible pour $h(a)$ est donc $+\infty$.

6. Méthode 1 — Étudier le signe de la dérivée sur le demi-intervalle opposé.

Supposons $a > m$. Pour $t < 0$, la stricte croissance de ψ' et IV.3.c donnent $\psi'(t) < \psi'(0) = m < a$. Ainsi, $\ell'_a(t) > 0$ sur $] \alpha, 0[$. Comme $\ell_a(0) = 0$, on a $\ell_a(t) < 0$ pour $t < 0$.

En revanche, $\ell'_a(0) = a - m > 0$. La continuité de la dérivée assure qu'elle est positive sur un petit intervalle à droite de 0. Pour un $t > 0$ assez petit, $\ell_a(t) > \ell_a(0) = 0$. Les valeurs obtenues sur $] \alpha, 0]$ ne peuvent donc contribuer au supremum global. D'où

$$h(a) = \sup_{t \in]0, \beta[} (at - \psi(t)).$$

Supposons maintenant $a < m$. Pour $t > 0$, on a $\psi'(t) > m > a$, donc $\ell'_a(t) < 0$ et $\ell_a(t) < \ell_a(0) = 0$. De plus, $\ell'_a(0) = a - m < 0$, si bien que sur un petit intervalle à gauche de 0, ℓ_a décroît en allant vers 0 et prend des valeurs strictement positives. Le supremum provient donc du demi-intervalle négatif. Comme la valeur en 0 est nulle, on peut inclure cette borne sans changer le supremum :

$$h(a) = \sup_{t \in]\alpha, 0]} (at - \psi(t)).$$

Méthode 2 — Exploiter la tangente à la fonction convexe.

Comme $\psi'' > 0$, la fonction ψ est convexe. Elle est au-dessus de sa tangente en 0 ; en utilisant $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = m$, on obtient

$$\psi(t) \geq mt \quad (t \in]\alpha, \beta[).$$

Ainsi, $\ell_a(t) = at - \psi(t) \leq (a - m)t$. Pour $a > m$ et $t \leq 0$, cette borne est non positive ; pour $a < m$ et $t \geq 0$, elle est également non positive.

La dérivabilité en 0 donne par ailleurs

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ell_a(t)}{t} = a - m.$$

Si $a > m$, ce quotient est positif pour $t > 0$ assez petit, donc $\ell_a(t) > 0$ à droite. Si $a < m$, il est négatif pour $t < 0$ assez proche de 0, donc $\ell_a(t) > 0$ à gauche. Les valeurs de l'autre côté et en 0 sont au plus nulles. On retrouve exactement les deux égalités de supremum.

La première méthode utilise la croissance de ψ' ; la seconde montre le rôle de la tangente et du signe de $a - m$. Les conclusions restent valables lorsque le supremum est infini.

Elles montrent aussi que $h(a) > 0$ pour tout $a \neq m$. Pour $a = m$, la borne par la tangente donne $\ell_m(t) \leq 0$, donc $h(m) = 0$.

7. Dans cette partie, $\varphi(t) = L_X(t)$ sur $] \alpha, \beta[$. Supposons d'abord $a > m$. Pour chaque $t \in]0, \beta[$, prenons $s = nt > 0$. La condition $\varphi(s/n) = L_X(t) < +\infty$ permet d'appliquer II.2.c dans la forme prouvée en II.1. On obtient

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-nat} L_X(t)^n = e^{-n(at-\psi(t))} = e^{-n\ell_a(t)}.$$

Si $h(a) < +\infty$, pour tout $\eta > 0$ la définition du supremum et IV.6 assurent l'existence de $t_\eta \in]0, \beta[$ tel que $\ell_a(t_\eta) > h(a) - \eta$. Ainsi,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-n(h(a)-\eta)}.$$

En faisant tendre η vers 0, on conclut que $P(S_n/n \geq a) \leq e^{-nh(a)}$.

Si $h(a) = +\infty$, pour tout $M > 0$ il existe un paramètre admissible t tel que $\ell_a(t) > M$. La probabilité est donc au plus e^{-nM} pour tout $M > 0$, et vaut 0 en faisant tendre M vers l'infini. Cela correspond à la convention $e^{-n \cdot (+\infty)} = 0$.

Pour $a < m$, prenons $t \in]\alpha, 0[$ et $s = nt < 0$. II.3.b donne

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nat} L_X(t)^n = e^{-n\ell_a(t)}.$$

IV.6 identifie le supremum de ℓ_a sur ce demi-intervalle à $h(a)$. Si ce supremum est fini, le choix de t_η et le passage $\eta \rightarrow 0$ donnent la borne $e^{-nh(a)}$; s'il est infini, le choix de valeurs supérieures à tout $M > 0$ donne une probabilité nulle. Dans les deux cas,

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nh(a)}.$$

8. Posons $Y_n = S_n/n$. Puisque $\varepsilon > 0$, les événements $\{Y_n \leq m - \varepsilon\}$ et $\{Y_n \geq m + \varepsilon\}$ sont disjoints, et leur réunion est $\{|Y_n - m| \geq \varepsilon\}$. Comme $m - \varepsilon < m < m + \varepsilon$, IV.7 s'applique aux deux seuils :

$$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq e^{-nh(m-\varepsilon)} + e^{-nh(m+\varepsilon)}.$$

Chacun des termes est au plus $e^{-n \min(h(m-\varepsilon), h(m+\varepsilon))}$. Par conséquent,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n \min(h(m-\varepsilon), h(m+\varepsilon))}.$$

Si les deux valeurs de h sont infinies, les deux probabilités de queue sont nulles et la formule reste vraie avec la convention introduite en IV.5. Si une seule valeur est infinie, son terme exponentiel est nul et l'autre valeur détermine le minimum.

Enfin, IV.6 donne $h(m - \varepsilon) > 0$ et $h(m + \varepsilon) > 0$. La borne fournit donc une décroissance exponentielle vers 0, sauf lorsque la probabilité est déjà identiquement nulle. Elle précise quantitativement la loi faible des grands nombres dans ce cadre.

Relevé des adaptations

- Préliminaires, 1 : ajout de l'indépendance, absente du texte initial et nécessaire au résultat ; ajout de la variance finie pour employer la loi faible des grands nombres dans le cadre du référentiel fourni.
- Préliminaires, 2 : précision que les événements considérés sont définis, sans introduire de théorie abstraite des ensembles probabilisables.
- III.2.b-3.b : précision que l'expression obtenue pour $h(a, p)$ est utilisée aussi pour $a \leq p$, afin de définir explicitement les termes employés dans les questions suivantes, sans fournir leur calcul dans le sujet.
- III.4 : remplacement de $\varepsilon > 0$ par $0 < \varepsilon < \min(p, 1 - p)$, car la formule du sujet original utilise $h(p - \varepsilon, p)$ et $h(p + \varepsilon, p)$ alors que h est définie sur $]0, 1[$. Hors de cette restriction, la formule initiale peut contenir des logarithmes non définis.
- III.6.b : remplacement de la demande sur le risque quadratique, exclu du référentiel, par le calcul de la variance et la démonstration de la convergence en probabilité. Les calculs d'espérance et de variance utiles à la suite sont conservés.

- III.7.b : précision du caractère asymptotique de l'intervalle de confiance et ajout de l'indication d'inverser $n(f_n - p)^2 \leq t_\alpha^2 p(1 - p)$. Cela permet une construction complète à partir du théorème limite central sans remplacement non justifié du paramètre dans une convergence en loi.
- IV.1.c : précision de la convergence absolue de l'intégrale, nécessaire pour conclure à l'existence de l'espérance ; cette propriété est démontrée avec les majorations du sujet.
- IV.2.a-b : rectification de la condition sur l'incrément en $0 < |h| < \delta$, afin d'exclure le quotient indéfini pour $h = 0$.
- IV.3.a : précision que le domaine demandé est celui de l'intervalle considéré.
L'hypothèse du PDF n'affirme pas que cet intervalle est maximal.
- IV.5-8 : l'hypothèse $L_1(\alpha) < a < L_1(\beta)$ est limitée à IV.5 au lieu d'être maintenue « désormais ». La définition de h est précisée pour tout réel a , avec la possibilité $h(a) = +\infty$ et la convention exponentielle correspondante. Cela conserve le sens de IV.8 pour tout $\varepsilon > 0$, même lorsque les seuils sortent de l'image de ψ' .