



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

2004

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $E'_n = \{0, 1, \dots, n\}$ et Ω l'ensemble des permutations de E_n . Pour tout ensemble fini A , on note $\text{Card}(A)$ son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

Pour tout entier k , on note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k , le nombre

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout entier $m \geq 0$, on note $E_m = \{1, \dots, m\}$, avec $E_0 = \emptyset$, et $d_{m,0}$ le nombre de permutations de E_m sans point fixe. L'unique permutation de l'ensemble vide donne $d_{0,0} = 1$; on a $d_{1,0} = 0$.

Partie I

Pour tout $\omega \in \Omega$, on appelle point fixe de ω tout élément $k \in E_n$ tel que $\omega(k) = k$.

On appelle dérangement toute permutation $\omega \in \Omega$ telle que, pour tout $k \in E_n$, $\omega(k) \neq k$. Ainsi, un dérangement est une permutation sans point fixe.

On note $D_{n,0} = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in E_n, \omega(i) \neq i\}$ et, pour tout $k \in E'_n$,

$$D_{n,k} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ admet exactement } k \text{ points fixes}\}.$$

Enfin, on note $d_{n,0} = \text{Card}(D_{n,0})$ et, pour tout $k \in E'_n$, $d_{n,k} = \text{Card}(D_{n,k})$.

1. Montrer que

$$D_{n,k} = \bigcup_{\substack{I \subseteq E_n \\ \text{Card}(I)=k}} \{\omega \in \Omega \mid \omega|_I = \text{Id}_I, \omega|_{E_n \setminus I} \text{ est un dérangement}\},$$

pour tout $k \in E'_n$, où $\omega|_I$ est la restriction de la permutation ω à I , Id_I représente la permutation identité de I et $\omega|_{E_n \setminus I}$ est la restriction de ω au complémentaire de I .

2. En déduire que, pour tout $k \in E'_n$,

$$d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k,0}.$$

3. a) Soit $\omega \in \Omega$ un dérangement de E_n . Soit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. On définit l'application $\bar{\omega}_j$ sur E_{n+1} par

$$\bar{\omega}_j(k) = \begin{cases} \omega(k) & \text{si } k \notin \{j, n+1\}, \\ n+1 & \text{si } k = j, \\ \omega(j) & \text{si } k = n+1. \end{cases}$$

Montrer que l'on définit ainsi un dérangement de E_{n+1} .

3. b) Soit $\omega \in \Omega$ admettant un unique point fixe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que $\bar{\omega}_j$, défini ci-dessus, est un dérangement de E_{n+1} .

3. c) Montrer que les dérangements de E_{n+1} construits dans les questions 3. a) et 3. b) sont distincts et que tout dérangement de E_{n+1} peut être obtenu de cette façon.

3. d) En déduire que

$$d_{n+1,0} = n d_{n,0} + d_{n,1} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0}).$$

4. Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = d_{n,0} - nd_{n-1,0}$.
4. a) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n , puis u_n en fonction de n .
4. b) En déduire que $d_{n,0} = nd_{n-1,0} + (-1)^n$.
4. c) On pose $v_1 = 0$ et, pour $n \geq 2$, $v_n = \frac{d_{n,0}}{n!}$. Déterminer v_n en fonction de n , puis montrer que

$$d_{n,0} = n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

Partie II

Afin de lancer un nouveau produit sur le marché, le service marketing d'une entreprise propose au directeur général la campagne suivante :

- mettre en vente au prix unitaire de b euros n exemplaires du produit ;
- chaque exemplaire sera numéroté de façon apparente d'un nombre compris entre 1 et n ;
- à l'intérieur de chaque exemplaire du produit et de façon cachée se trouve un second numéro ;
- l'acheteur qui trouvera à l'intérieur de l'exemplaire un numéro identique à celui figurant à l'extérieur gagnera B euros.

Les montants b et B sont strictement positifs. On suppose que les numéros cachés sont tous différents, compris entre 1 et n et sont choisis au hasard.

Avant de donner son accord, le directeur général souhaite étudier le bilan financier d'une telle campagne.

Afin de formaliser la notion de choix au hasard et pour toute la suite du problème, on munit Ω de la probabilité uniforme discrète P , définie pour tout $A \subseteq \Omega$ par

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Enfin, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de gagnants.

1. a) En utilisant les résultats de la première partie, déterminer la loi de X_n .

1. b) Établir les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1.$$

On justifiera de manière précise l'interversion des deux signes sommes.

2. Calculer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire X_n . On pourra calculer $E(X_n(X_n - 1))$.

3. a) Montrer que le solde financier aléatoire de l'opération pour l'entreprise, défini comme les recettes des ventes diminuées des primes versées, est donné par

$$C_n = nb - BX_n.$$

En déduire le solde moyen $E(C_n)$ ainsi que le risque, donné par l'écart-type $\sigma(C_n)$.

3. b) Quelle sera, d'après vous, la réponse du directeur général ?

4. Montrer que le gain aléatoire d'un acheteur ayant acquis un seul produit est donné par $G_n = BY_n - b$, où Y_n est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de

paramètre $1/n$. En déduire le gain moyen de l'acheteur.

Partie III

1. Montrer que la suite des variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

2. Montrer que, pour tout $k \in E'_n$,

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|.$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \leq \frac{2}{m!}.$$

4. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}.$$

5. On considère les instructions Python suivantes :

Python

```
eps = 0.00001
x = 2.0
k = 2
while x > eps / 2:
    x = x * (2 / k)
    k = k + 1
```

`print(k)`

5. a) On entre dans la boucle `while` avec $x = 2$. On suppose que l'on est passé $j \geq 1$ fois dans cette boucle. Quelle est la valeur de x à l'entrée de la boucle la fois suivante ?
5. b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, définie par $u_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, est décroissante et admet une limite que l'on calculera.
5. c) En déduire que la boucle `while` ci-dessus se termine.
5. d) La valeur affichée par la dernière ligne du programme est 14. Que représente-t-elle ?

Partie IV

Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle moment factoriel d'ordre $k \geq 1$, lorsqu'il existe, l'espérance de la variable aléatoire $X(X-1) \cdots (X-k+1)$, soit

$$m_k(X) = E(X(X-1) \cdots (X-k+1)).$$

On pose également $m_0(X) = 1$. Pour un entier $m \geq 2$, X_m désigne le nombre de points fixes d'une permutation uniforme de E_m ; on pose $X_0 = 0$ et $X_1 = 1$. Ces variables peuvent être définies sur des espaces probabilisés distincts; seules leurs lois sont utilisées ici.

1. Montrer que, si $k \geq n+1$, alors $m_k(X_n) = 0$.
2. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que

$$m_k(X_n) = \sum_{j=0}^{n-k} P(X_{n-k} = j) = 1.$$

3. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. Déterminer $m_k(Z)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.

4. On définit des polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par

$$P_0(X) = 1, \quad P_k(X) = X(X-1) \cdots (X-k+1) \quad (k \geq 1).$$

4. a) Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

4. b) En déduire que X_n et Z ont les mêmes moments d'ordre k pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$.

5. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe des réels $(a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k})$ tels que

$$X^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{P_j(X)}{j!}.$$

Pour $k = 0$, X^0 est le polynôme constant 1 ; son évaluation en 0 vaut 1.

6. On souhaite désormais calculer les réels $(a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k})$.

6. a) Déterminer $\frac{P_j(i)}{j!}$ pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$ et $i \in \mathbb{N}$.

6. b) Montrer que, pour $i \in \{0, \dots, k\}$,

$$i^k = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a_{j,k}.$$

6. c) Écrire la matrice A de ce système d'équations, en ordonnant les inconnues de $a_{0,k}$ à $a_{k,k}$ et les équations de $i = 0$ à $i = k$.
6. d) En se plaçant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k , écrire l'expression de l'endomorphisme représenté par tA , transposée de la matrice A , dans la base canonique.
6. e) Montrer que tA est inversible et déterminer son inverse.
6. f) En déduire que la matrice A est inversible. Déterminer A^{-1} , puis l'expression de $a_{j,k}$ pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$.
6. g) Donner l'expression des moments d'ordre k , $1 \leq k \leq n$, de la variable aléatoire X_n .

Partie V

On suppose dans cette partie qu'un acheteur a acquis ℓ , $1 \leq \ell \leq n$, exemplaires distincts du produit. L'ensemble de ces exemplaires est noté $L = \{j_1, j_2, \dots, j_\ell\} \subseteq E_n$.

On note Y_n^ℓ la variable aléatoire égale au nombre d'exemplaires gagnants du produit parmi ces ℓ exemplaires achetés.

Enfin, pour tout $i \in E_n$, on pose $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega(i) = i\}$.

1. Pour tout $A \subseteq \Omega$, on note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire définie par

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Justifier l'égalité

$$Y_n^\ell = \mathbf{1}_{A_{j_1}} + \mathbf{1}_{A_{j_2}} + \dots + \mathbf{1}_{A_{j_\ell}}.$$

En déduire l'espérance $E(Y_n^\ell)$ de la variable aléatoire Y_n^ℓ .

2. a) Montrer que

$$(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{A_{j_i}} + \sum_{\substack{1 \leq i, r \leq \ell \\ i \neq r}} \mathbf{1}_{A_{j_i} \cap A_{j_r}}.$$

La seconde somme porte sur les couples ordonnés d'indices distincts.

2. b) En déduire la variance de la variable aléatoire Y_n^ℓ .

3. a) Montrer que le gain de l'acheteur est égal à $G_n = BY_n^\ell - b\ell$.

3. b) Déterminer son gain moyen ainsi que l'écart-type de ce gain.

3. c) Du point de vue de l'acheteur, est-il intéressant d'acquérir plusieurs exemplaires du produit ?