



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

2004

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Notations et conventions

On travaille sur les permutations au sens d'applications bijectives de l'ensemble fini $E_n = \{1, \dots, n\}$ dans lui-même. Une permutation est ici un objet combinatoire ; aucune structure algébrique supplémentaire n'est nécessaire.

Il y a $n!$ permutations de E_n et chacune a la probabilité $1/n!$. On utilise $d_{0,0} = 1$, $d_{1,0} = 0$, $X_0 = 0$, $X_1 = 1$ et $m_0(X) = 1$. Ces conventions rendent les formules valables lorsque tous les éléments sont fixés ou qu'il ne reste qu'un élément.

Partie I

1. Décomposition selon l'ensemble des points fixes

Pour $I \subseteq E_n$, $\text{Card}(I) = k$, notons F_I l'ensemble figurant dans l'union demandée. Il faut identifier exactement les permutations ayant I pour ensemble de points fixes.

Si ω fixe tout élément de I , elle envoie $E_n \setminus I$ dans lui-même. En effet, si $x \notin I$ et $\omega(x) = y \in I$, alors $\omega(y) = y = \omega(x)$, ce qui contredit l'injectivité de ω . Sa restriction au complémentaire est donc une bijection de ce complémentaire.

Si $\omega \in D_{n,k}$, l'ensemble $I = \{x \in E_n \mid \omega(x) = x\}$ a cardinal k . La restriction de ω à I est l'identité et sa restriction au complémentaire n'a aucun point fixe. Ainsi $\omega \in F_I$.

Réciproquement, si $\omega \in F_I$, tous les éléments de I sont fixes et aucun élément du complémentaire ne l'est. Il y a exactement k points fixes. On a donc

$$D_{n,k} = \bigcup_{\substack{I \subseteq E_n \\ \text{Card}(I)=k}} F_I.$$

De plus, cette union est disjointe : une permutation possède un unique ensemble de points fixes. Cette précision permettra d'additionner les cardinaux à la question suivante.

2. Nombre de permutations ayant exactement k points fixes

On compte les ensembles I possibles, puis les permutations associées à chacun.

Il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de cardinal k . Pour un tel I , la permutation est imposée sur I et peut être n'importe quel dérangement du complémentaire, qui a $n - k$ éléments.

Une bijection entre $E_n \setminus I$ et E_{n-k} transporte les dérangements de l'un vers l'autre : si $\varphi : E_{n-k} \rightarrow E_n \setminus I$ est cette bijection, à un dérangement τ correspond $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$. Ce transport est bijectif et préserve l'absence de points fixes. Il y a donc $d_{n-k,0}$ possibilités.

L'union de I.1 étant disjointe,

$$d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k,0}.$$

La formule comprend $k = 0$ et $k = n$. Pour $k = n$, elle donne $d_{n,n} = 1$; pour $k = n - 1$, elle donne $d_{n,n-1} = n d_{1,0} = 0$. Une permutation ne peut donc pas avoir exactement $n - 1$ points fixes.

3. a) Insertion du nouvel élément dans un dérangement

L'application $\bar{\omega}_j$ remplace l'image $\omega(j)$ de j par $n + 1$ et donne l'image $\omega(j)$ au nouvel élément $n + 1$.

Les images des éléments de $E_n \setminus \{j\}$ sont les éléments de $E_n \setminus \{\omega(j)\}$, chacun une seule fois. En ajoutant les images $n + 1$ et $\omega(j)$, chaque élément de E_{n+1} est atteint exactement une fois. L'application est donc une permutation.

Pour $k \in E_n \setminus \{j\}$, $\bar{\omega}_j(k) = \omega(k) \neq k$, puisque ω est un dérangement. De plus,

$$\bar{\omega}_j(j) = n + 1 \neq j, \quad \bar{\omega}_j(n + 1) = \omega(j) \leq n \neq n + 1.$$

Ainsi $\bar{\omega}_j$ est un dérangement de E_{n+1} .

3. b) Insertion à la place d'un unique point fixe

Le raisonnement sur les images en I.3.a prouve la bijectivité, même lorsque $\omega(j) = j$.

Tout élément de $E_n \setminus \{j\}$ était non fixe et conserve son image. L'ancien point fixe et le nouvel élément vérifient maintenant

$$\bar{\omega}_j(j) = n + 1 \neq j, \quad \bar{\omega}_j(n + 1) = j \neq n + 1.$$

Aucun élément n'est fixe. La construction fournit encore un dérangement de E_{n+1} .

3. c) Unicité et exhaustivité de la construction

Il faut retrouver de manière unique la permutation initiale et l'indice d'insertion à partir d'un dérangement σ de E_{n+1} .

Puisque $\sigma(n + 1) \neq n + 1$, l'unique antécédent $j = \sigma^{-1}(n + 1)$ appartient à E_n . Posons $a = \sigma(n + 1) \in E_n$ et définissons sur E_n

$$\omega(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{si } k \neq j, \\ a & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Les images de $E_n \setminus \{j\}$ par σ sont exactement $E_n \setminus \{a\}$. En ajoutant $\omega(j) = a$, on obtient une permutation de E_n .

Pour $k \neq j$, $\omega(k) = \sigma(k) \neq k$. Deux cas sont possibles : si $a \neq j$, ω n'a aucun point fixe et relève de I.3.a ; si $a = j$, ω admet le seul point fixe j et relève de I.3.b. Dans les deux cas, $\bar{\omega}_j = \sigma$.

L'indice j est imposé par $\sigma^{-1}(n + 1)$ et toutes les valeurs de ω sont ensuite imposées.

Deux données de construction distinctes ne peuvent donc pas produire le même dérangement. Les deux types de construction sont disjoints et leur réunion contient tous les dérangements de E_{n+1} .

3. d) Relation de récurrence

Par I.3.c, les dérangements de E_{n+1} sont en bijection avec les deux ensembles de données suivants : un dérangement de E_n accompagné de l'un des n indices possibles ; une permutation de E_n ayant un unique point fixe, l'indice étant alors imposé.

Il y a respectivement $nd_{n,0}$ et $d_{n,1}$ constructions. Par I.2, $d_{n,1} = nd_{n-1,0}$. Par conséquent,

$$d_{n+1,0} = nd_{n,0} + d_{n,1} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0}).$$

4. a) Étude de u_n

On transforme la relation précédente afin de faire apparaître u_n :

$$u_{n+1} = d_{n+1,0} - (n+1)d_{n,0} = n(d_{n,0} + d_{n-1,0}) - (n+1)d_{n,0} = -u_n.$$

Sur E_2 , la permutation échangeant 1 et 2 est l'unique dérangement, donc $d_{2,0} = 1$. Avec $d_{1,0} = 0$, on obtient $u_2 = 1$.

La récurrence $u_{n+1} = -u_n$ donne alors, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = (-1)^{n-2} = (-1)^n.$$

4. b) Récurrence simplifiée pour $d_{n,0}$

La définition de u_n et I.4.a donnent directement

$$d_{n,0} - nd_{n-1,0} = (-1)^n.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$,

$$d_{n,0} = nd_{n-1,0} + (-1)^n.$$

4. c) Formule explicite

Méthode 1 — Somme télescopique

On divise la relation de I.4.b par $n!$, qui est strictement positif :

$$v_n = v_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Pour $n = 2$, cette formule utilise bien $v_1 = d_{1,0}/1! = 0$. En sommant de 2 à n ,

$$v_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!},$$

puisque les termes de rangs 0 et 1 s'annulent. On en déduit

$$d_{n,0} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

La même formule donne 1 pour $n = 0$ et 0 pour $n = 1$, conformément aux conventions.

Méthode 2 — Identité finie d'indicatrices

Pour chaque $i \in E_n$, posons $J_i(\omega) = 1$ si $\omega(i) = i$ et 0 sinon. Alors

$$\prod_{i=1}^n (1 - J_i(\omega))$$

vaut 1 exactement pour les dérangements.

En développant ce produit fini et en sommant sur toutes les permutations,

$$d_{n,0} = \sum_{I \subseteq E_n} (-1)^{\text{Card}(I)} \text{Card}\{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I, \omega(i) = i\}.$$

Si I a cardinal r , les r images imposées laissent $(n - r)!$ permutations. En regroupant les sous-ensembles de même cardinal,

$$d_{n,0} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} (n - r)! = n! \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r!}.$$

Cette preuve établit l'identité combinatoire particulière par développement d'un produit fini ; elle ne suppose aucune formule générale du crible. La première méthode exploite la récurrence du sujet ; la seconde explique directement l'alternance des signes.

Partie II

1. a) Loi du nombre de gagnants

On associe à chaque exemplaire son numéro extérieur i et le numéro caché $\omega(i)$. Un exemplaire est gagnant si et seulement si i est un point fixe de ω .

Ainsi $\{X_n = k\} = D_{n,k}$. Par l'uniformité et I.2,

$$P(X_n = k) = \frac{d_{n,k}}{n!} = \frac{d_{n-k,0}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \quad (0 \leq k \leq n).$$

Pour tout entier k en dehors de cet intervalle, la probabilité vaut 0. Le support exact est $\{0, 1, \dots, n-2, n\}$: le cas $n-1$ est impossible ; pour tout $m \geq 2$, la permutation envoyant 1 sur 2, 2 sur 3, et ainsi de suite jusqu'à m sur 1 est un dérangement, donc $d_{m,0} > 0$.

En particulier, $P(X_n = n) = 1/n!$ et $P(X_n = n-1) = 0$.

1. b) Identités de sommes

L'ensemble des indices est fini :

$$T_n = \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid k + i \leq n\}.$$

La première somme parcourt T_n en choisissant d'abord k ; la seconde parcourt exactement le même ensemble en choisissant d'abord i . La commutativité et l'associativité d'une somme finie justifient donc l'interversion sans aucune condition de convergence.

Méthode 1 — Normalisation de la loi

En utilisant II.1.a et le fait que les événements $\{X_n = k\}$, $0 \leq k \leq n$, forment une partition,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1.$$

L'interversion établie ci-dessus donne aussi la seconde expression égale à 1.

Méthode 2 — Regroupement selon $k + i$

Pour chaque $r \in \{0, \dots, n\}$, les termes avec $k + i = r$ ont pour somme

$$\sum_{i=0}^r \frac{(-1)^i}{i!(r-i)!} = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^i.$$

Pour $r \geq 1$, le binôme donne $(1 - 1)^r = 0$. Pour $r = 0$, la somme se réduit à 1. La somme sur T_n vaut donc 1.

La normalisation est la méthode la plus directe dans ce problème ; le regroupement par diagonales fournit une preuve algébrique indépendante, utilisable sans interprétation probabiliste.

2. Espérance et variance de X_n

La variable X_n est bornée par n ; ses moments existent.

Méthode 1 — Loi et moments factoriels

Dans l'espérance, le terme de rang 0 est nul. Avec $r = k - 1$,

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{n-1-r} \frac{(-1)^i}{i!} = 1.$$

On applique l'identité finie de II.1.b à l'entier $n - 1$. Sa preuve algébrique fonctionne pour tout entier non négatif.

De même, les termes de rangs 0 et 1 sont nuls dans le moment factoriel d'ordre 2. En posant $r = k - 2$,

$$E(X_n(X_n - 1)) = \sum_{r=0}^{n-2} \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{n-2-r} \frac{(-1)^i}{i!} = 1.$$

Cela reste valable pour $n = 2$, où la somme vaut 1 par son seul terme. Comme $X_n^2 = X_n(X_n - 1) + X_n$, on a $E(X_n^2) = 2$. La formule de Huygens donne

$$E(X_n) = 1, \quad V(X_n) = 2 - 1^2 = 1.$$

Méthode 2 — Somme d'indicatrices

Notons $J_i = \mathbf{1}_{\{\omega(i)=i\}}$. Alors

$$X_n = \sum_{i=1}^n J_i.$$

Il y a $(n-1)!$ permutations fixant i , donc $P(J_i = 1) = 1/n$. Pour $i \neq j$, il y a $(n-2)!$ permutations fixant les deux éléments, donc

$$E(J_i J_j) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

La linéarité de l'espérance, qui ne demande pas l'indépendance, donne $E(X_n) = n/n = 1$. En développant le carré,

$$E(X_n^2) = \sum_{i=1}^n E(J_i) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} E(J_i J_j) = 1 + \frac{n(n-1)}{n(n-1)} = 2.$$

Ainsi $V(X_n) = 1$. Les indicatrices ne sont pas indépendantes : pour $i \neq j$, $1/[n(n-1)] \neq 1/n^2$.

La première méthode exploite la loi obtenue précédemment ; la seconde calcule les moments sans déterminer toute cette loi.

3. a) Solde de l'entreprise

Question adaptée au programme actuel : rectification locale du vocabulaire économique. Le PDF appelle « coût » la quantité $nb - BX_n$, alors qu'elle est égale aux recettes diminuées des primes versées. L'expression est conservée et désigne désormais le solde financier C_n .

Les n ventes rapportent nb euros et les X_n gagnants reçoivent au total BX_n euros. Donc

$$C_n = nb - BX_n.$$

Comme X_n est bornée, C_n admet une espérance et une variance. Par linéarité puis par la formule de variance d'une transformation affine,

$$E(C_n) = nb - BE(X_n) = nb - B,$$

$$V(C_n) = B^2V(X_n) = B^2.$$

Les montants étant positifs, $\sigma(C_n) = B$. L'espérance dépend de n ; l'écart-type du solde est constant lorsque B est fixé.

3. b) Décision du directeur général

Il faut distinguer ce que le modèle permet de calculer et le choix économique, qui dépend d'éléments supplémentaires.

Le solde moyen vaut $nb - B$. Si $nb > B$, les ventes financent en moyenne les primes et dégagent un excédent ; si $nb = B$, le solde moyen est nul ; si $nb < B$, il est négatif. Un

décideur qui cherche uniquement un solde moyen positif sera donc favorable dans le premier cas.

Cependant, l'écart-type vaut B : un solde moyen favorable ne garantit pas un solde réalisé positif. Par exemple, si $B > b$, l'événement $X_n = n$, de probabilité $1/n!$, donne $C_n = n(b - B) < 0$. À l'inverse, si $B \leq b$, alors $C_n \geq n(b - B) \geq 0$ pour toute permutation.

Le modèle ne fournit ni frais de fabrication, ni budget de campagne, ni bénéfice commercial futur, ni préférence face au risque. On ne peut donc pas affirmer une réponse inconditionnelle du directeur. La conclusion quantitative est le critère moyen $nb - B$ accompagné de la mesure de dispersion B .

4. Gain d'un acheteur d'un seul exemplaire

Pour un exemplaire fixé i , notons $Y_n = \mathbf{1}_{\{\omega(i)=i\}}$. Le même dénombrement qu'en II.2 donne

$$P(Y_n = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ainsi Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/n$. L'acheteur paie b et reçoit B uniquement s'il gagne ; son gain monétaire net est

$$G_n = BY_n - b.$$

Comme Y_n est bornée, l'espérance existe et vaut

$$E(G_n) = \frac{B}{n} - b.$$

Ce gain concerne exclusivement les flux monétaires ; il ne mesure pas la valeur d'usage du produit acheté.

Partie III

1. Convergence en loi vers une loi de Poisson

On utilise la caractérisation de la convergence en loi pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$: il suffit que les probabilités ponctuelles convergent vers celles de la loi limite.

La série exponentielle est absolument convergente et donne

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = e^{-1}.$$

Pour un entier $k \geq 0$ fixé, lorsque $n \geq \max(2, k)$, II.1.a donne

$$P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \rightarrow \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Ces limites sont les probabilités d'une variable Z suivant la loi de Poisson de paramètre 1, puisqu'elles sont positives et que leur somme vaut $e^{-1}e = 1$. On conclut que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \sim \mathcal{P}(1).$$

Le raisonnement fixe k avant de faire tendre n vers l'infini ; il ne repose sur aucun échange de limite et de somme infinie.

2. Expression de l'erreur ponctuelle

Pour $0 \leq k \leq n$, on retranche à la somme partielle de II.1.a la série exponentielle complète. Celle-ci étant convergente,

$$P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} = -\frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

En prenant la valeur absolue, on obtient exactement

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|.$$

3. Majoration de la queue de la série exponentielle

On compare terme à terme avec une série géométrique. Pour $q \geq 0$ et $m \geq 1$,

$$(m+q)! = m! \prod_{r=1}^q (m+r) \geq m!(m+1)^q,$$

le produit vide pour $q = 0$ valant 1. Ainsi

$$\frac{1}{(m+q)!} \leq \frac{1}{m!(m+1)^q}.$$

Toutes les quantités étant positives, on peut sommer ces inégalités jusqu'à un rang fini puis passer à la limite. La série géométrique converge car $0 < 1/(m+1) < 1$. On obtient

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{m!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^q} = \frac{1}{m!} \frac{m+1}{m} \leq \frac{2}{m!}.$$

La dernière inégalité vient de $(m+1)/m = 1 + 1/m \leq 2$.

4. Majoration de l'erreur cumulée

Méthode 1 — Utilisation de la question précédente

La convergence absolue de la série permet de majorer la valeur absolue de sa queue par la queue des valeurs absolues. Par III.2 et III.3, avec $m = n - k + 1 \geq 1$,

$$\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq \frac{2}{k!(n-k+1)!}.$$

On somme pour $k = 0, \dots, n$ et on utilise le binôme :

$$\sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq \frac{2}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} = \frac{2(2^{n+1} - 1)}{(n+1)!} \leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}.$$

C'est la majoration demandée.

Méthode 2 — Reste intégral de Taylor

On peut améliorer la borne en tenant compte de l'alternance des signes. La fonction $f(t) = e^{-t}$ est de classe C^∞ sur $[0, 1]$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $r = n - k$ donne

$$e^{-1} = \sum_{i=0}^r \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_0^1 (1-t)^r e^{-t} dt.$$

Comme $0 < e^{-t} \leq 1$ sur $[0, 1]$,

$$\left| e^{-1} - \sum_{i=0}^r \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r dt = \frac{1}{(r+1)!}.$$

Il en résulte

$$\sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)!} \leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}.$$

La première méthode suit la progression du sujet. La seconde fournit une borne plus fine à l'aide d'une formule d'analyse autorisée ; le programme de III.5 reste fondé sur la borne demandée, plus large.

La somme étudiée porte seulement sur $0 \leq k \leq n$; elle n'inclut pas la masse de la loi de Poisson sur les entiers strictement supérieurs à n .

5. Programme de contrôle de la borne

Code adapté en Python. Le programme complet, sans import nécessaire, est :

Python

```
eps = 0.00001
x = 2.0
k = 2
while x > eps / 2:
    x = x * (2 / k)
    k = k + 1
print(k)
```

La variable eps est la précision visée. La variable x contient le terme courant d'une suite ; k fournit le facteur de mise à jour et sert à retrouver son indice. Le programme a été exécuté : il affiche 14 après douze passages dans la boucle.

5. a) Valeur après j passages

On suit simultanément x et k . Au premier passage, le facteur multiplicatif est $2/2$. Au deuxième, c'est $2/3$, puis $2/4$, etc.

Après $j \geq 1$ passages exécutés, on a donc

$$x = 2 \prod_{r=2}^{j+1} \frac{2}{r} = \frac{2^{j+1}}{(j+1)!}, \quad k = j + 2.$$

Il s'agit de la valeur disponible au prochain test de la condition `while`, et de celle à

l'entrée du passage suivant si la condition reste vraie. La formule peut également se vérifier par récurrence : multiplier par $2/(j+2)$ transforme le terme d'indice j en celui d'indice $j+1$.

5. b) Décroissance et limite de u_n

Ici $u_n = 2^{n+1}/(n+1)!$ est une nouvelle suite, distincte de celle de la partie I. Tous ses termes sont positifs.

On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{3} < 1 \quad (n \geq 1).$$

Ainsi la suite est strictement décroissante. En itérant l'inégalité $u_{n+1} \leq (2/3)u_n$ et en utilisant $u_1 = 2$,

$$0 < u_n \leq 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Le membre de droite tend vers 0, donc, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Cette preuve repose sur une domination géométrique explicite, sans invoquer un critère général de convergence des séries.

5. c) Terminaison de la boucle

D'après III.5.a, après $j \geq 1$ passages, x vaut u_j . Puisque $u_j \rightarrow 0$ et que $\text{eps}/2 = 5 \times 10^{-6} > 0$, il existe un entier J tel que $u_J \leq \text{eps}/2$.

Le prochain test $x > \text{eps} / 2$ est alors faux. La boucle se termine donc après un nombre fini de passages. La vérification numérique confirme douze passages pour les valeurs

données ; la preuve de terminaison vient de l'encadrement de III.5.b.

5. d) Interprétation de la valeur affichée

Question adaptée au programme actuel : rectification de la valeur annoncée. Avec les instructions et la précision du PDF, la sortie est 14, et non 11.

Posons $M_n = 2^{n+2}/(n+1)!$, la borne de III.4. On a $M_n = 2u_n$. Après j passages, la condition d'arrêt $x \leq \text{eps}/2$ équivaut à $M_j \leq \text{eps}$, et la variable affichée vaut $k = j + 2$.

Pour vérifier le seuil, on calcule

$$M_{11} = \frac{8192}{12!} \simeq 1,71022 \times 10^{-5} > 10^{-5},$$

$$M_{12} = \frac{16384}{13!} \simeq 2,63111 \times 10^{-6} < 10^{-5}.$$

La décroissance de M_n montre que 12 est le plus petit entier $n \geq 2$ pour lequel la borne de III.4 est inférieure ou égale à 10^{-5} . Le programme affiche cet entier augmenté de 2, soit 14.

La sortie fournit donc la certification suivante : pour tout $n \geq 12$,

$$\sum_{k=0}^n \left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| \leq 10^{-5}.$$

Le seuil 12 est minimal pour cette borne suffisante ; il ne prétend pas être le plus petit effectif donnant cette précision pour l'erreur exacte.

Partie IV

1. Moments factoriels d'ordre supérieur à n

Pour $k \geq n + 1$ et une réalisation $X_n = r \in \{0, \dots, n\}$, le produit

$$r(r-1) \cdots (r-k+1)$$

contient le facteur $r-r=0$, puisque $r \leq n \leq k-1$. Il vaut donc 0 pour toute réalisation.

La variable dont on prend l'espérance est identiquement nulle ; son espérance existe et

$$m_k(X_n) = 0 \quad (k \geq n+1).$$

2. Moments factoriels d'ordre au plus n

Question adaptée au programme actuel : les conventions $m_0(X) = 1$, $X_0 = 0$ et $X_1 = 1$ précisent les cas limites présents dans la formule originale.

Méthode 1 — Calcul à partir de la loi

Pour $1 \leq k \leq n$, la variable X_n est bornée et le moment existe. Le produit factoriel vaut 0 pour une valeur de X_n strictement inférieure à k , et vaut $r!/(r-k)!$ pour $r \geq k$. La formule de la loi peut s'écrire

$$P(X_n = r) = \frac{d_{n-r,0}}{r!(n-r)!}.$$

Ainsi, avec $j = r - k$,

$$m_k(X_n) = \sum_{r=k}^n \frac{r!}{(r-k)!} \frac{d_{n-r,0}}{r!(n-r)!} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{d_{n-k-j,0}}{j!(n-k-j)!}.$$

Pour tout entier $m \geq 0$, le nombre de permutations de E_m ayant exactement j points fixes est $\binom{m}{j} d_{m-j,0}$: le dénombrement de I.2 s'applique aussi à l'ensemble vide et au singleton. Il donne

$$P(X_m = j) = \frac{d_{m-j,0}}{j!(m-j)!} \quad (0 \leq j \leq m),$$

avec les lois certaines convenues pour $m = 0, 1$. En prenant $m = n - k$, la somme précédente est la somme des probabilités de la loi de X_{n-k} , donc vaut 1.

Pour $k = 0$, $m_0(X_n) = 1$ par définition et

$$\sum_{j=0}^n P(X_n = j) = 1.$$

On a donc, dans tous les cas,

$$m_k(X_n) = \sum_{j=0}^{n-k} P(X_{n-k} = j) = 1 \quad (0 \leq k \leq n).$$

Méthode 2 — Comptage de listes ordonnées de points fixes

Pour $1 \leq k \leq n$, le produit $X_n(X_n - 1) \cdots (X_n - k + 1)$ compte les listes ordonnées de k points fixes distincts.

Il y a $n!/(n-k)!$ listes ordonnées de k éléments distincts de E_n . Une liste donnée est entièrement fixée avec probabilité $(n-k)!/n!$, car les $n-k$ autres éléments peuvent être

permutés librement. En écrivant le nombre de listes de points fixes comme une somme finie d'indicatrices puis en prenant l'espérance,

$$m_k(X_n) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(n-k)!}{n!} = 1.$$

Avec la convention du produit vide, le raisonnement donne aussi $m_0 = 1$. La somme des probabilités de X_{n-k} vaut elle-même 1, ce qui retrouve l'égalité demandée.

La première méthode relie les lois pour des tailles différentes ; la seconde explique combinatoirement pourquoi tous ces moments factoriels valent 1.

3. Moments factoriels de la loi de Poisson

Pour $k = 0$, $m_0(Z) = 1$. Pour $k \geq 1$, puisque Z prend des valeurs entières non négatives, le produit factoriel est nul pour $Z < k$ et non négatif ailleurs. Le calcul par transfert donne une série à termes positifs :

$$\sum_{r=k}^{\infty} \frac{r!}{(r-k)!} P(Z=r) = e^{-1} \sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{(r-k)!} = e^{-1} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} = 1.$$

Cette somme finie établit en même temps l'existence absolue du moment factoriel. Par conséquent,

$$m_k(Z) = 1 \quad \text{pour tout entier } k \geq 0.$$

En particulier, le résultat vaut pour tous les ordres demandés, $0 \leq k \leq n$.

4. a) Base des polynômes factoriels

Chaque P_j est un polynôme unitaire de degré j , y compris $P_0 = 1$ de degré 0.

Pour démontrer la liberté, supposons

$$\sum_{j=0}^n c_j P_j = 0.$$

Si un coefficient était non nul, soit r le plus grand indice tel que $c_r \neq 0$. Le coefficient de X^r dans cette somme serait c_r , puisque tous les autres termes auraient un degré inférieur à r . Cela contredirait l'annulation du polynôme.

Tous les coefficients c_j sont donc nuls. La famille est libre et comprend $n + 1$ éléments, exactement la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle forme une base de cet espace.

4. b) Égalité des moments ordinaires

Fixons $k \in \{0, \dots, n\}$. Par IV.4.a, il existe des réels $c_0, \dots, c_n$ tels que

$$X^k = \sum_{j=0}^n c_j P_j(X).$$

Tous les $P_j(X_n)$ sont intégrables car X_n est bornée. Tous les $P_j(Z)$ sont également intégrables par IV.3. La domination

$$|Z^k| \leq \sum_{j=0}^n |c_j| |P_j(Z)|$$

montre l'existence du moment ordinaire de Z avant d'utiliser la linéarité. Puis

$$E(X_n^k) = \sum_{j=0}^n c_j m_j(X_n) = \sum_{j=0}^n c_j,$$

$$E(Z^k) = \sum_{j=0}^n c_j m_j(Z) = \sum_{j=0}^n c_j.$$

Ainsi

$$E(X_n^k) = E(Z^k) \quad (0 \leq k \leq n).$$

Pour $k = 0$, les deux puissances sont les constantes 1. L'égalité des moments est exacte pour ces ordres ; elle ne signifie pas que les deux lois sont égales, puisque $X_n \leq n$ tandis que la loi de Z attribue une probabilité positive à tout entier non négatif.

5. Décomposition des monômes

Pour $0 \leq k \leq n$, le raisonnement de IV.4.a appliqué à $\mathbb{R}_k[X]$ montre que $(P_0, \dots, P_k)$ en est une base. Multiplier chaque vecteur par le scalaire non nul $1/j!$ préserve la propriété de base.

Le polynôme $X^k \in \mathbb{R}_k[X]$ admet donc une unique décomposition

$$X^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{P_j(X)}{j!}.$$

Les coefficients $a_{j,k}$ sont réels. Pour $k = 0$, cette identité est $1 = a_{0,0}$, donc $a_{0,0} = 1$.

6. a) Valeur de $P_j(i)/j!$

Pour $j = 0$, on a $P_0(i)/0! = 1 = \binom{i}{0}$.

Pour $j \geq 1$ et $i \geq j$, la définition donne

$$\frac{P_j(i)}{j!} = \frac{i(i-1)\cdots(i-j+1)}{j!} = \frac{i!}{j!(i-j)!} = \binom{i}{j}.$$

Si $0 \leq i < j$, le produit contient le facteur $i - i = 0$ et vaut 0, comme $\binom{i}{j}$ par convention.

Ainsi

$$\frac{P_j(i)}{j!} = \binom{i}{j} \quad (i \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n).$$

6. b) Système vérifié par les coefficients

On évalue l'identité polynomiale de IV.5 en un entier $i \in \{0, \dots, k\}$:

$$i^k = \sum_{j=0}^k a_{j,k} \frac{P_j(i)}{j!} = \sum_{j=0}^k \binom{i}{j} a_{j,k}.$$

Les coefficients binomiaux sont nuls pour $j > i$, donc

$$i^k = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a_{j,k}.$$

Pour $k = 0$ et $i = 0$, l'évaluation du polynôme constant X^0 vaut 1 ; elle est donc bien cohérente avec $a_{0,0} = 1$.

6. c) Matrice du système

Pour k fixé, posons les vecteurs colonnes

$$a^{(k)} = {}^t(a_{0,k}, a_{1,k}, \dots, a_{k,k}), \quad b^{(k)} = {}^t(0^k, 1^k, \dots, k^k),$$

avec $0^0 = 1$ lorsqu'on évalue le polynôme constant pour $k = 0$. Le système de IV.6.b s'écrit $Aa^{(k)} = b^{(k)}$, où les lignes et colonnes sont indexées de 0 à k et

$$A_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{j} & \text{si } j \leq i, \\ 0 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Autrement dit, A est la matrice triangulaire inférieure dont la ligne i est $((\binom{i}{0}), (\binom{i}{1}), \dots, (\binom{i}{i}), 0, \dots, 0)$. Sa diagonale est entièrement égale à 1. Par exemple, pour $k = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 0$, la matrice est simplement (1) .

6. d) Endomorphisme représenté par tA

La base canonique de $\mathbb{R}_k[X]$ est $(1, X, \dots, X^k)$. La colonne j de tA est constituée des coefficients $\binom{j}{i}$, pour $0 \leq i \leq j$, puis de zéros.

L'endomorphisme T représenté par tA vérifie donc, par le binôme,

$$T(X^j) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i = (X + 1)^j.$$

Pour tout polynôme

$$P(X) = \sum_{j=0}^k c_j X^j,$$

la linéarité donne

$$T(P)(X) = \sum_{j=0}^k c_j (X + 1)^j = P(X + 1).$$

C'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$, car la substitution $X + 1$ préserve la borne sur le degré et est linéaire.

6. e) Inverse de tA

Méthode 1 — Translation inverse

La traduction polynomiale obtenue en IV.6.d suggère de définir S sur $\mathbb{R}_k[X]$ par $S(P)(X) = P(X - 1)$. Cet opérateur est lui aussi linéaire et préserve le degré.

Pour tout P , les deux compositions valent

$$T(S(P))(X) = S(P)(X + 1) = P(X),$$

$$S(T(P))(X) = T(P)(X - 1) = P(X).$$

Ainsi $S = T^{-1}$, ce qui prouve l'inversibilité de tA . Pour déterminer sa matrice, on développe

$$S(X^j) = (X - 1)^j = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i.$$

Il en résulte

$$({}^tA)^{-1}_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Méthode 2 — Vérification par produit matriciel

Notons B la matrice définie par les coefficients de la formule précédente. Les matrices tA et B sont triangulaires supérieures. Pour $i > j$, leur produit a donc un coefficient nul.

Pour $i \leq j$,

$$({}^tAB)_{i,j} = \sum_{r=i}^j \binom{r}{i} (-1)^{j-r} \binom{j}{r}.$$

Les factorielles donnent l'identité

$$\binom{r}{i} \binom{j}{r} = \binom{j}{i} \binom{j-i}{r-i}.$$

En posant $q = r - i$, le coefficient du produit vaut

$$\binom{j}{i} \sum_{q=0}^{j-i} \binom{j-i}{q} (-1)^{j-i-q}.$$

Pour $i = j$, cette somme vaut 1. Pour $i < j$, le binôme donne $(1 - 1)^{j-i} = 0$. Ainsi

$${}^tAB = I_{k+1}.$$

La matrice tA est triangulaire avec des coefficients diagonaux égaux à 1, donc elle est inversible; l'identité obtenue impose $B = ({}^tA)^{-1}$. On retrouve l'inverse annoncé.

La première méthode explique l'inverse par une transformation simple des polynômes; la seconde vérifie directement la formule par les coefficients binomiaux.

6. f) Inverse de A et expression des coefficients

Pour toute matrice inversible M , $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$. En transposant l'inverse obtenu en IV.6.e, on déduit que A est inversible et que

$$(A^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} & \text{si } j \leq i, \\ 0 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Par exemple, pour $k = 3$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système donne $a^{(k)} = A^{-1}b^{(k)}$. La ligne j fournit donc

$$a_{j,k} = \sum_{r=0}^j (-1)^{j-r} \binom{j}{r} r^k \quad (0 \leq j \leq k).$$

Pour $k = 0$, cette formule donne $a_{0,0} = 1$ avec la convention d'évaluation $0^0 = 1$. Pour $k \geq 1$, elle donne $a_{0,k} = 0$. En comparant les coefficients dominants dans IV.5, on vérifie aussi $a_{k,k} = k!$.

6. g) Moments ordinaires de X_n

On prend l'espérance dans la décomposition polynomiale de IV.5. Tous les termes sont intégrables et la somme est finie. Pour $1 \leq k \leq n$, IV.2 donne $E(P_j(X_n)) = 1$ pour tout $j \leq k$, donc

$$E(X_n^k) = \sum_{j=0}^k \frac{a_{j,k}}{j!} = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \sum_{r=0}^j (-1)^{j-r} \binom{j}{r} r^k.$$

On peut commencer la somme en $j = 1$ puisque $a_{0,k} = 0$ pour $k \geq 1$. Cette formule ne dépend pas de n tant que $n \geq k$.

Pour vérifier les premiers ordres, les vecteurs $(a_{0,k}, \dots, a_{k,k})$ valent successivement

$$(0, 1), \quad (0, 1, 2), \quad (0, 1, 6, 6), \quad (0, 1, 14, 36, 24).$$

Ainsi les moments d'ordres 1, 2, 3 et 4 valent respectivement 1, 2, 5 et 15, chacun sous la condition que cet ordre soit inférieur ou égal à n . Les deux premiers retrouvent les résultats de II.2.

Partie V

1. Nombre d'exemplaires gagnants et espérance

Question adaptée au programme actuel : la condition $1 \leq \ell \leq n$ et le caractère distinct des exemplaires explicitent les hypothèses nécessaires à la notation $L \subseteq E_n$.

Pour une réalisation ω , $\mathbf{1}_{A_{j_i}}(\omega)$ vaut 1 exactement lorsque l'exemplaire extérieur j_i est gagnant. La somme de ces indicatrices compte donc les exemplaires gagnants parmi les achats :

$$Y_n^\ell = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{A_{j_i}}.$$

La variable est comprise entre 0 et ℓ ; elle est intégrable. Pour chaque j_i , les permutations fixant j_i sont au nombre de $(n-1)!$, donc $P(A_{j_i}) = 1/n$. Par linéarité,

$$E(Y_n^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} P(A_{j_i}) = \frac{\ell}{n}.$$

L'indépendance des indicatrices n'est ni nécessaire ni vérifiée.

2. a) Développement du carré

Pour toute indicatrice, $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$. De plus, $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cap B}$, car le produit vaut 1 exactement lorsque les deux événements se produisent.

En développant le carré de la somme de V.1,

$$(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{A_{j_i}}^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, r \leq \ell \\ i \neq r}} \mathbf{1}_{A_{j_i}} \mathbf{1}_{A_{j_r}},$$

puis en appliquant ces deux identités,

$$(Y_n^\ell)^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{A_{j_i}} + \sum_{\substack{1 \leq i, r \leq \ell \\ i \neq r}} \mathbf{1}_{A_{j_i} \cap A_{j_r}}.$$

La seconde somme contient $\ell(\ell - 1)$ termes, puisque les couples sont ordonnés. Avec une somme sur $i < r$, il faudrait un facteur 2.

2. b) Variance du nombre de gains

Méthode 1 — Moment d'ordre deux

La variable Y_n^ℓ est bornée, donc son moment d'ordre deux existe. Pour deux numéros distincts j_i, j_r , fixer leurs images laisse $(n - 2)!$ permutations; ainsi

$$P(A_{j_i} \cap A_{j_r}) = \frac{(n - 2)!}{n!} = \frac{1}{n(n - 1)}.$$

En prenant l'espérance dans V.2.a,

$$E((Y_n^\ell)^2) = \frac{\ell}{n} + \frac{\ell(\ell-1)}{n(n-1)}.$$

Par la formule de Huygens,

$$V(Y_n^\ell) = \frac{\ell}{n} + \frac{\ell(\ell-1)}{n(n-1)} - \frac{\ell^2}{n^2}.$$

Pour simplifier, on met au dénominateur commun $n^2(n-1)$. Le numérateur vaut

$$\ell n(n-1) + n\ell(\ell-1) - \ell^2(n-1) = \ell(n^2 - 2n + \ell).$$

Donc

$$V(Y_n^\ell) = \frac{\ell(n^2 - 2n + \ell)}{n^2(n-1)}.$$

Méthode 2 — Variances et covariances

Chaque indicatrice est une Bernoulli de paramètre $1/n$, donc sa variance vaut $(n-1)/n^2$. Pour $i \neq r$, le dénombrement précédent donne

$$\text{Cov}(\mathbf{1}_{A_{j_i}}, \mathbf{1}_{A_{j_r}}) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

La formule de variance d'une somme fournit

$$V(Y_n^\ell) = \ell \frac{n-1}{n^2} + \ell(\ell-1) \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

En mettant au même dénominateur, on obtient

$$V(Y_n^\ell) = \frac{\ell((n-1)^2 + \ell - 1)}{n^2(n-1)} = \frac{\ell(n^2 - 2n + \ell)}{n^2(n-1)}.$$

La première méthode suit le carré demandé ; la seconde montre l'effet de la dépendance : les covariances sont strictement positives et accroissent la variance.

Les cas limites sont cohérents : pour $\ell = 1$, la variance vaut $(n-1)/n^2$, celle d'une Bernoulli de paramètre $1/n$; pour $\ell = n$, $Y_n^n = X_n$ et la formule donne 1. Le dénominateur est strictement positif puisque $n \geq 2$.

3. a) Gain total de l'acheteur

L'acheteur reçoit B pour chacun de ses Y_n^ℓ exemplaires gagnants et paie b pour chacun des ℓ exemplaires achetés. Son gain monétaire net est donc

$$G_n = BY_n^\ell - b\ell.$$

Ici la notation G_n désigne le gain pour les ℓ achats de cette partie ; elle retrouve celui de II.4 lorsque $\ell = 1$.

3. b) Gain moyen et écart-type

Comme Y_n^ℓ est bornée, les moments nécessaires existent. Par transformation affine,

$$E(G_n) = B\frac{\ell}{n} - b\ell = \ell \left(\frac{B}{n} - b \right),$$

$$V(G_n) = B^2 \frac{\ell(n^2 - 2n + \ell)}{n^2(n-1)}.$$

Puisque $B > 0$,

$$\sigma(G_n) = B \sqrt{\frac{\ell(n^2 - 2n + \ell)}{n^2(n-1)}}.$$

Le numérateur sous la racine est positif : $n^2 - 2n + \ell = n(n-2) + \ell > 0$ pour $n \geq 2$ et $\ell \geq 1$.

3. c) Intérêt de plusieurs achats

Le gain moyen par exemplaire est constant :

$$\frac{E(G_n)}{\ell} = \frac{B}{n} - b.$$

Ainsi, acheter davantage ne rend pas chaque exemplaire plus rentable en moyenne. Si $B < nb$, chaque achat a une espérance monétaire négative ; multiplier les achats multiplie la perte moyenne. Si $B = nb$, l'espérance reste nulle. Si $B > nb$, elle est positive et croît proportionnellement à ℓ .

Le risque absolu augmente également avec le nombre d'achats. En posant $c = n^2 - 2n \geq 0$, le numérateur de la variance est $\ell(c + \ell)$; sa différence entre $\ell + 1$ et ℓ vaut $c + 2\ell + 1 > 0$. Pour B et n fixés, la variance et l'écart-type du gain total sont donc strictement croissants en ℓ .

En revanche, la dispersion du gain moyen par exemplaire est

$$V\left(\frac{G_n}{\ell}\right) = \frac{B^2}{n^2(n-1)} \left(\frac{n^2 - 2n}{\ell} + 1\right).$$

Elle décroît avec ℓ si $n > 2$ et reste constante si $n = 2$. Cela ne supprime pas une éventuelle espérance négative.

Du seul point de vue de l'espérance monétaire, plusieurs achats sont donc favorables uniquement si $B > nb$; ils sont défavorables si $B < nb$, et neutres en moyenne si $B = nb$.

Un choix tenant compte du risque, du budget ou de la valeur d'usage des produits demande des informations supplémentaires.

Relevé des adaptations

- I.2 et I.4.c : conventions $d_{0,0} = 1$ et $d_{1,0} = 0$ explicitées dans le préambule, nécessaires lorsque $n - k$ vaut 0 ou 1 et pour l'initialisation de la récurrence.
- II.3.a et II.3.b : la quantité $nb - BX_n$ et l'étude correspondante sont désignées comme un solde financier, recettes diminuées des primes. Le terme « coût » du PDF avait le sens économique opposé à l'expression donnée. Les formules sont conservées ; $b > 0$ et $B > 0$ sont explicités à partir de leur rôle de prix et de prime.
- III.5.a à III.5.d : Code adapté en Python, avec conservation des initialisations, de la condition et de l'ordre des mises à jour.
- III.5.d : valeur annoncée 11 rectifiée en 14. L'exécution du programme avec $\text{eps} = 10^{-5}$ donne douze passages et affiche 14, correspondant à l'effectif certifié $n = 12$.
- IV.2 et IV.3 : convention du moment factoriel d'ordre zéro $m_0 = 1$ précisée ; les variables certaines $X_0 = 0$ et $X_1 = 1$ sont définies pour donner un sens à X_{n-k} aux cas limites.
- IV.5 et IV.6.b : l'évaluation du polynôme constant X^0 en 0 est précisée pour le cas $k = 0$.
- V.1 : bornes $1 \leq \ell \leq n$ et achats d'exemplaires distincts explicités, nécessaires puisque L est un sous-ensemble de E_n .
- V.2.a : la somme sur les indices distincts est explicitement décrite comme une somme sur les couples ordonnés ; l'identité originale est conservée.