



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

2003

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

Partie I — Introduction informatique

On rappelle que les entiers compris entre 0 et 31 s'écrivent avec au plus cinq chiffres en binaire. Pour tout $n \in \{0, \dots, 31\}$, il existe une unique liste $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ d'éléments de $\{0, 1\}$ telle que

$$n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + 2^4a_4 = \overline{a_4a_3a_2a_1a_0}_{\text{deux}}.$$

On appellera $\text{bin}(n)$ la liste $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$.

I.1) Déterminer l'écriture binaire de 6, puis $\text{bin}(6)$, et déterminer $\text{bin}(21)$. On justifiera les résultats.

I.2) On souhaite écrire une fonction Python pour obtenir $\text{bin}(n)$. Compléter la fonction suivante de sorte qu'elle renvoie une liste L telle que $L[0]$ contienne a_4 , $L[1]$ contienne a_3 , etc.

Python

```
def bin(n):
    L = [0, 0, 0, 0, 0]
    # À compléter
    return L
```

On rappelle que $n // d$ est le quotient entier de la division de l'entier positif ou nul n par l'entier strictement positif d , et que $n \% d$ est son reste.

I.3) On souhaite numéroté les cartes d'un jeu standard de 32 cartes. On propose la fonction suivante, qui utilise la fonction bin précédente.

Python

```
def carte(n):
    fam = ["trèfle", "carreau", "cœur", "pique"]
```

```
val = ["sept", "huit", "neuf", "dix", "valet", "dame", "roi", "as"]
L = bin(n)
famille = fam[2 * L[0] + L[1]]
valeur = val[4 * L[2] + 2 * L[3] + L[4]]
print(valeur, "de", famille, "est la carte numéro", n)
```

Une chaîne de caractères est une suite de caractères placée entre guillemets ; `print` affiche ses arguments, séparés par des espaces.

Quelle est la carte numéro 6 ? Quelle est la carte numéro 1 ? Quel est le numéro de la dame de cœur ?

Partie II — Position du problème et recherche des fonctions solutions

On cherche à définir une mesure de l'incertitude d'un événement : pour un événement A de probabilité non nulle, on veut définir un réel $i(A)$, appelé incertitude de A ou entropie de A , respectant le modèle suivant.

- (i) Pour l'événement certain Ω , l'incertitude est nulle : $i(\Omega) = 0$.
- (ii) Si A et son événement contraire $\bar{A}$ sont équiprobables, alors $i(A) = 1$.
- (iii) Si A et B sont indépendants pour la probabilité P et si $P(A \cap B) \neq 0$, alors $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$.
- (iv) Si $P(A) = P(B) \neq 0$, alors $i(A) = i(B)$.

Le dernier axiome signifie que $i(A)$ ne dépend que du réel $p = P(A)$.

II.1) Soit φ une fonction définie sur $]0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i_\varphi(A) = \varphi(P(A))$.

Montrer que si φ vérifie les conditions

$$\varphi(1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(1/2) = 1 \quad (1)$$

$$\forall p \in]0, 1], \forall q \in]0, 1], \quad \varphi(pq) = \varphi(p) + \varphi(q) \quad (2),$$

alors i_φ vérifie (i), (ii), (iii) et (iv).

II.2) Existe-t-il des réels α et β pour lesquels $\varphi_{\alpha,\beta} : x \mapsto \alpha \ln(x) + \beta$ vérifie (1) et (2) ?

II.3) Soit $\varphi :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]0, 1]$ et vérifiant (1) et (2).

II.3.a) Montrer, à l'aide d'un changement de variable affine, que pour tout $p \in]0, 1]$,

$$\frac{1}{p} \int_{p/2}^p \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \varphi(p) + \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq.$$

II.3.b) En déduire que φ est dérivable sur $]0, 1]$ et, en dérivant $p \mapsto p\varphi(p)$, démontrer que

$$\forall p \in]0, 1], \quad -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} p \varphi'(p) + \int_{1/2}^1 \varphi(q) dq.$$

Au point 1, la dérivée s'entend à gauche.

II.3.c) En déduire qu'il existe alors (α, β) tel que $\varphi = \varphi_{\alpha,\beta}$. On pourra considérer l'expression de $\varphi'(p)$ en fonction de p .

II.4) Que peut-on conclure de cette étude ?

Partie III — Incertitude des événements

Dans toute la suite du problème, on notera φ la fonction définie sur $]0, 1]$ par

$$\varphi(x) = -\frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i(A) = \varphi(P(A))$.

III.1) On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « la carte tirée est la dame de cœur ». Que valent $P(A)$ et $i(A)$?

III.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des entiers s'écrivant avec au plus n chiffres en binaire. On choisit un élément de E au hasard et A est l'événement « le nombre obtenu est 0 ». Quel est le cardinal de E ? Que valent $P(A)$ et $i(A)$?

III.3) Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$. Comparer $i(A)$ et $i(B)$.

III.4) Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

Partie IV — Incertitude d'une variable aléatoire discrète

Dans toute la suite du problème, on considère la fonction h définie sur $[0, 1]$ par

$$h(0) = 0 \quad \text{et, pour } x \in]0, 1], \quad h(x) = -\frac{x \ln(x)}{\ln(2)}.$$

Pour une variable aléatoire réelle discrète X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on pose, sous réserve d'existence,

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x)).$$

$H(X)$ est l'incertitude moyenne, ou entropie, de X . Si X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $H(X)$ existe et, en notant $p_k = P(X = x_k)$, on a

$$H(X) = \sum_{k=1}^n h(P(X = x_k)) = \sum_{k=1}^n h(p_k).$$

IV.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U_n suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$, que vaut $H(U_n)$?

IV.2) Si on suppose $P(Y = 1) = 1/4$, $P(Y = 2) = 1/4$ et $P(Y = 3) = 1/2$, que vaut $H(Y)$? Classer par ordre croissant $H(U_2)$, $H(U_3)$ et $H(Y)$.

IV.3) Vérifier que h est continue et positive sur $[0, 1]$. Est-elle dérivable en 0 ? Étudier h et dessiner sa courbe représentative.

IV.4) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini. Montrer que $H(X) \geq 0$, avec égalité si et seulement si X est quasi certaine.

IV.5) Pour $x \in [0, 1]$, on pose $h_2(x) = h(x) + h(1 - x)$.

IV.5.a) Pour $x \in [0, 1]$, on a $h_2(x) = h_2(1 - x)$. Que signifie ce résultat quant à la courbe de h_2 dans un repère orthonormé ?

IV.5.b) Étudier h_2 et donner son graphe.

IV.5.c) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que $H(X) \leq 1$, avec égalité si et seulement si $p = 1/2$.

IV.6) Soit X_1 et X_2 deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs p_1 et p_2 . Soit Z la variable de Bernoulli telle que $P(Z = 1) = P(\text{« } X_1 + X_2 \text{ est impair »})$.

Donner la loi et l'espérance de Z . En notant $p = P(Z = 1)$, contrôler que

$$1 - 2p = (1 - 2p_1)(1 - 2p_2).$$

IV.7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Soit Z_n la variable de Bernoulli telle que $P(Z_n = 1) = P(\text{« } X \text{ est impair »})$.

Montrer que $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$. On pourra raisonner par récurrence.

Montrer que $H(Z_n) \leq 1$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité?

Partie V — Maximalité de l'entropie

V.1) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

V.1.a) Soit O l'ensemble des $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in]0, 1[^{n-1}$ vérifiant $1 - p_1 - \dots - p_{n-1} > 0$.
On admettra que O est un ouvert.

Pour $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in O$, on pose

$$h_n(p_1, \dots, p_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} h(p_k) + h(1 - p_1 - \dots - p_{n-1}).$$

Montrer que h_n admet au plus un extremum sur O .

V.1.b) On rappelle que si une fonction f est convexe sur un intervalle I , alors

$$\forall (t_1, \dots, t_n) \in I^n, \quad f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k).$$

Vérifier que $-h$ est convexe sur $]0, 1]$ et en déduire que si $(p_1, \dots, p_n) \in]0, 1]^n$ et $p_1 + \dots + p_n = 1$, alors

$$\sum_{k=1}^n h(p_k) \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.$$

V.1.c) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Montrer que

$$H(X) \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)},$$

avec égalité si et seulement si X suit la loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$.

V.2) Soit $p \in]0, 1[$ et G une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . On pose $m = E(G)$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = P(G = k)$.

V.2.a) Rappeler la valeur de m , montrer que $H(G)$ existe et la calculer.

V.2.b) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $E(X) = m$ et $H(X)$ existe. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_k = P(X = k)$ et on supposera $q_k > 0$.

En justifiant rapidement que

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) \leq x - 1 \quad (3),$$

vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(p_k) - \ln(q_k) \leq \frac{p_k}{q_k} - 1,$$

et établir $H(X) \leq H(G)$, avec égalité si et seulement si X suit la même loi que G .

Partie VI — Incertitude d'une variable aléatoire continue

Pour cette partie, on étend h à $[0, +\infty[$ en conservant la définition $h(0) = 0$ et $h(u) = -u \ln(u) / \ln(2)$ pour $u > 0$.

Pour une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, on dit que X admet une incertitude quand l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x)) dx$$

converge. Dans ce cas, sa valeur

$$H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(f(x)) dx$$

est appelée incertitude de X .

VI.1) Cas des lois normales.

VI.1.a) Soit Y_0 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que $H(Y_0)$ existe et calculer $H(Y_0)$.

VI.1.b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma > 0$. Montrer que $H(Y)$ existe et calculer $H(Y)$.

VI.2) Soit $\lambda > 0$ et X_0 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . On désignera par f_0 la densité de X_0 .

VI.2.a) Montrer que $H(X_0)$ existe et calculer $H(X_0)$ en fonction de λ .

VI.2.b) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, admettant une densité f . On suppose que $H(X)$ existe et que X admet une espérance égale à $1/\lambda$.

Montrer que

$$H(X_0) = -\frac{1}{\ln(2)} \int_0^{+\infty} f(x) \ln(f_0(x)) dx.$$

En utilisant (3), montrer que $H(X) \leq H(X_0)$.