



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

2002

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'objectif du problème est d'étudier, parmi les portefeuilles boursiers de rentabilité moyenne donnée, ceux qui font courir à leurs porteurs un risque minimal en un sens qui sera précisé plus loin.

On identifie dans la suite tout vecteur x de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$, à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base canonique :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On note ${}^t x$ sa transposée, c'est-à-dire la matrice-ligne $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Le produit scalaire canonique est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et défini par :

$$\langle x, y \rangle = {}^t x y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

PRÉLIMINAIRE

On rappelle que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est :

$$F^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = 0 \text{ pour tout } a \in F\}.$$

- a)** Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- b)** On suppose F de dimension p , avec $0 \leq p \leq n$, et on considère une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F , que l'on complète en une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, ensemble des combinaisons linéaires de $e_{p+1}, \dots, e_n$. En déduire la dimension de $F^\perp$ en fonction de celle de F .

- c) Déterminer de même l'orthogonal de $F^\perp$. En déduire que $(F^\perp)^\perp = F$.

PARTIE I

On désigne par $C = (c_{ij})$ une matrice symétrique réelle d'ordre n et par Q la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$Q(x) = \langle x, Cx \rangle = {}^t x C x.$$

On suppose que $Q(x) > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$.

1°) Exemple d'une telle matrice

On suppose dans cette question, et dans cette question seulement, que $n = 3$, avec :

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer ${}^t x C_0 x$ pour tout vecteur x de composantes x_1, x_2, x_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- b) Montrer que ${}^t x C_0 x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^3$. On calculera ${}^t x C_0 x - (x_1 + x_2 + x_3)^2$.
- c) Montrer que C_0 est inversible et déterminer sa matrice inverse.
- d) Calculer ${}^t x C_0^{-1} x$ pour tout vecteur x de composantes x_1, x_2, x_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- e) Montrer que ${}^t x C_0^{-1} x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^3$.

2°) Inversibilité de la matrice C

- a) Vérifier, pour tous vecteurs x, y de $\mathbb{R}^n$, que ${}^t x C y$ est un nombre réel et que ${}^t x C y = {}^t y C x$.
- b) On considère un vecteur x appartenant au noyau de C , c'est-à-dire tel que $Cx = 0$.
Montrer que ${}^t x C x = 0$ et en déduire que C est inversible.
- c) Montrer que C^{-1} est une matrice symétrique réelle d'ordre n , autrement dit que ${}^t (C^{-1}) = C^{-1}$. On pourra transposer l'égalité $CC^{-1} = C^{-1}C = I_n$, où I_n est la matrice-identité d'ordre n .
- d) En posant $x = Cy$, montrer que ${}^t x C^{-1} x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$.

Établir l'égalité suivante, dans laquelle u, v sont deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad {}^t (u + \lambda v) C^{-1} (u + \lambda v) = {}^t u C^{-1} u + 2\lambda ({}^t u C^{-1} v) + \lambda^2 ({}^t v C^{-1} v).$$

Préciser le signe de ce trinôme du second degré en λ et prouver l'inégalité :

$$({}^t u C^{-1} v)^2 < ({}^t u C^{-1} u) ({}^t v C^{-1} v).$$

3°) Condition pour que $Q(x) \leq Q(x + h)$ lorsque $\langle u, h \rangle = 0$

On désigne ici par x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.

- a) Montrer, pour tous vecteurs x, h de $\mathbb{R}^n$ et tout réel λ , que :

$$Q(x + \lambda h) = Q(x) + 2\lambda \langle h, Cx \rangle + \lambda^2 Q(h).$$

- b) On suppose que $Q(x) \leq Q(x + h)$ pour tout vecteur h tel que $\langle u, h \rangle = 0$.

- Établir, pour tout vecteur h tel que $\langle u, h \rangle = 0$, l'inégalité

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, 2\lambda \langle h, Cx \rangle + \lambda^2 Q(h) \geq 0.$$
- En déduire que $\langle h, Cx \rangle = 0$ pour tout vecteur h tel que $\langle u, h \rangle = 0$.
- En déduire que Cx est colinéaire à u , c'est-à-dire que x est colinéaire à $C^{-1}u$.
- c) Établir inversement, si Cx est colinéaire à u , que $Q(x) \leq Q(x + h)$ lorsque $\langle u, h \rangle = 0$.
- d) La condition précédente est désormais supposée vérifiée et on note donc $Cx = \alpha u$.
 - Montrer que $\alpha = a \langle u, x \rangle$, où a désigne un réel dépendant de u et de C^{-1} tel que $a > 0$.
 - Montrer que $Q(x) = a(\langle u, x \rangle)^2$.

4°) Condition pour que $Q(x) \leq Q(x + h)$ lorsque $\langle u, h \rangle = \langle v, h \rangle = 0$

On désigne ici par x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et par u, v deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$.

- a) On suppose que $Q(x) \leq Q(x + h)$ pour tout vecteur h tel que $\langle u, h \rangle = \langle v, h \rangle = 0$.
- Établir, comme précédemment, que $\langle h, Cx \rangle = 0$ pour tout vecteur h tel que

$$\langle u, h \rangle = \langle v, h \rangle = 0.$$
 - En déduire que $Cx \in \text{Vect}(u, v)$, c'est-à-dire que $x \in \text{Vect}(C^{-1}u, C^{-1}v)$.
- b) Établir inversement, si $Cx \in \text{Vect}(u, v)$, que $Q(x) \leq Q(x + h)$ lorsque

$$\langle u, h \rangle = \langle v, h \rangle = 0.$$
- c) La condition précédente est désormais supposée vérifiée et on note donc

$$Cx = \alpha u + \beta v.$$

- Montrer que les réels α, β sont solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha {}^t u C^{-1} u + \beta {}^t u C^{-1} v = \langle u, x \rangle, \\ \alpha {}^t v C^{-1} u + \beta {}^t v C^{-1} v = \langle v, x \rangle. \end{cases}$$

- Montrer que ce système admet une solution unique, de la forme :

$$\begin{cases} \alpha = a \langle u, x \rangle - b \langle v, x \rangle, \\ \beta = -b \langle u, x \rangle + c \langle v, x \rangle, \end{cases}$$

avec a, b, c trois réels dépendant de u, v, C^{-1} tels que $a > 0$ et $c > 0$.

- Montrer que $Q(x) = a(\langle u, x \rangle)^2 - 2b\langle u, x \rangle \langle v, x \rangle + c(\langle v, x \rangle)^2$.

PARTIE II

5°) Covariance des variables aléatoires X et Y

On considère deux variables aléatoires X, Y , discrètes ou à densité, définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X), E(Y)$ et des variances finies $V(X), V(Y)$. On suppose $V(X) > 0$, ce qui signifie que X n'est pas presque sûrement constante.

Leur covariance est définie par :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

- a) Établir, pour tout réel λ , la formule :

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En considérant le signe de ce trinôme du second degré en λ , en déduire que :

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y).$$

Établir de plus que l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels λ, μ tels que $\lambda X + Y = \mu$ avec une probabilité égale à 1.

c) On suppose en outre $V(Y) > 0$. En déduire que le coefficient de corrélation ρ de X, Y appartient à $[-1, 1]$, puis préciser à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou à 1 .

On considère pendant une période donnée un marché financier où coexistent n actifs financiers $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ces actifs sont détenus positivement ou négativement, ce qui signifie alors qu'ils sont vendus à découvert, au sein de portefeuilles que l'on ne modifie pas dans la période.

On désigne par $R_1, R_2, \dots, R_n$ les variables aléatoires représentant les taux de rentabilité des actifs $A_1, A_2, \dots, A_n$ pendant cette période : une unité monétaire de l'actif A_i donne un gain aléatoire R_i à la fin de la période. Ces variables sont définies sur un même espace probabilisé et admettent :

- des espérances $E(R_i) = m_i$, supposées non toutes égales ;
- des variances finies $V(R_i) = \sigma_i^2$, supposées strictement positives, avec $\sigma_i > 0$.

6°) Étude des portefeuilles dans le cas $n = 2$

Cette question est sans influence sur les suivantes, qui peuvent être abordées indépendamment.

On considère un portefeuille contenant les actifs A_1, A_2 en proportions respectives x et $1 - x$, avec $x \in \mathbb{R}$. Son taux de rentabilité est $R = xR_1 + (1 - x)R_2$. On note ρ le coefficient de corrélation de R_1, R_2 , supposé tel que $-1 < \rho < 1$.

a) Exprimer $E(R)$ et $V(R)$ en fonction de $x, m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$.

- b)** Établir, si $m_1 \neq m_2$, qu'il existe des réels a, b, c , avec $a > 0$ et $c > 0$, indépendants de x et donc de la composition du portefeuille, tels que :

$$V = a - 2bm + cm^2,$$

avec $V = V(R)$ et $m = E(R)$.

7°) Matrice de variances-covariances des variables aléatoires $R_1, \dots, R_n$

On désigne par C la matrice symétrique réelle dont le coefficient de la i -ième ligne et de la j -ième colonne est $\text{Cov}(R_i, R_j)$, pour $1 \leq i, j \leq n$.

- a)** Établir, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ de composantes $x_1, \dots, x_n$, que :

$$V \left(\sum_{i=1}^n x_i R_i \right) = {}^t x C x.$$

- b)** En déduire que ${}^t x C x \geq 0$ pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $R_1, \dots, R_n$ pour que ${}^t x C x > 0$ pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$.

On supposera désormais cette condition bien vérifiée par $R_1, \dots, R_n$ et on posera $Q(x) = {}^t x C x$.

8°) Étude des portefeuilles efficaces dans le cas général

On étudie un portefeuille contenant les actifs $A_1, \dots, A_n$ en proportions $x_1, \dots, x_n$. Son taux de rentabilité est $R = x_1 R_1 + \dots + x_n R_n$.

Ce portefeuille est dit efficace s'il est de variance minimale parmi tous les portefeuilles dont l'espérance de gain $E(R) = m$ est donnée. La variance constitue ici un risque pour le gain de l'investisseur qu'il importe de minimiser.

- a)** Montrer que le vecteur x de composantes $x_1, \dots, x_n$ vérifie :

$$x_1 + \dots + x_n = 1 \quad \text{et} \quad m_1 x_1 + \dots + m_n x_n = m.$$

- b)** Montrer que ce portefeuille est efficace si et seulement si $Q(x) \leq Q(x + h)$ pour tout vecteur h de composantes $h_1, \dots, h_n$ telles que :

$$h_1 + \dots + h_n = 0 \quad \text{et} \quad m_1 h_1 + \dots + m_n h_n = 0.$$

- c)** Pour les portefeuilles efficaces, établir à l'aide de I.4 qu'il existe des réels a, b, c , avec $a > 0$ et $c > 0$, indépendants de l'espérance prescrite m , tels que :

$$V = a - 2bm + cm^2,$$

où $V = V(R)$ et $m = E(R)$.

- d)** Déterminer la nature de la courbe représentative de cette fonction associant la variance V à l'espérance m , et représenter celle-ci. On rappelle que $a > 0$ et $c > 0$, et on supposera $b > 0$.

Expliquer pourquoi seuls les portefeuilles dont l'espérance m et la variance V appartiennent à la portion de cette courbe telle que $m \geq b/c$ sont intéressants pour les investisseurs. Cette portion constitue la frontière efficace de Markowitz, du nom de l'économiste qui a reçu le prix Nobel en 1990.