



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

2002

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PRÉLIMINAIRE

a) Structure de sous-espace vectoriel

Le vecteur nul appartient à $F^\perp$, car $\langle a, 0 \rangle = 0$ pour tout $a \in F$. Si $x, y \in F^\perp$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la bilinéarité donne, pour tout $a \in F$:

$$\langle a, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha \langle a, x \rangle + \beta \langle a, y \rangle = 0.$$

Ainsi $\alpha x + \beta y \in F^\perp$. Cette partie non vide est stable par combinaison linéaire : c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

b) Description et dimension

Méthode 1 — Coordonnées dans une base orthonormale

Écrivons

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

dans la base orthonormale donnée. Pour chaque j , $\langle e_j, x \rangle = x_j$. Puisque $(e_1, \dots, e_p)$ engendre F , être orthogonal à tout vecteur de F équivaut à être orthogonal à chacun de ces p vecteurs. Donc :

$$x \in F^\perp \iff x_1 = \dots = x_p = 0 \iff x \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

La famille $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est libre, car extraite d'une base. Elle constitue une base de $F^\perp$. Par conséquent :

$$\dim F^\perp = n - p = n - \dim F.$$

Si $p = 0$, toutes les coordonnées sont libres et $F^\perp = \mathbb{R}^n$. Si $p = n$, la famille finale est vide, son espace engendré est $\{0\}$ et $F^\perp = \{0\}$.

Méthode 2 — Projection orthogonale et théorème du rang

Considérons la projection orthogonale P_F sur F . La formule du cours dans une base orthonormale est

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^p \langle e_j, x \rangle e_j.$$

Sa nullité équivaut à l'annulation de ces p produits scalaires, donc $\text{Ker } P_F = F^\perp$. De plus $P_F(e_j) = e_j$ pour $1 \leq j \leq p$, et $\text{Im } P_F = F$. Le théorème du rang donne $\dim F^\perp = n - p$.

Enfin, $e_{p+1}, \dots, e_n$ appartiennent à ce noyau et leur espace engendré a dimension $n - p$. L'inclusion et l'égalité des dimensions donnent $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. La première méthode fournit directement les coordonnées ; la seconde relie l'orthogonal au noyau d'une projection.

c) Double orthogonal

En utilisant la même base orthonormale, un vecteur

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

est orthogonal à $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ si et seulement si $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$. Ainsi :

$$(F^\perp)^\perp = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F.$$

Cette égalité couvre aussi $F = \{0\}$ et $F = \mathbb{R}^n$.

PARTIE I

1°) Exemple d'une telle matrice

a) Expression de la forme quadratique

Le produit matriciel donne :

$$C_0 x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

En multipliant par la ligne ${}^t x$, on obtient :

$${}^t x C_0 x = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

b) Positivité stricte

Suivons l'indication en soustrayant le carré de la somme :

$${}^t x C_0 x - (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_2 + x_3)^2 + x_3^2.$$

Donc :

$${}^t x C_0 x = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2.$$

Cette somme est positive ou nulle. Si elle vaut zéro, chacun des carrés est nul : d'abord $x_3 = 0$, puis $x_2 = 0$ et enfin $x_1 = 0$. Ainsi elle est strictement positive pour tout $x \neq 0$.

c) Inversibilité et inverse

Méthode 1 — Résolution d'un système

Pour une colonne arbitraire $y = (y_1, y_2, y_3)^t$, résolvons $C_0 z = y$:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = y_1, \\ z_1 + 2z_2 + 2z_3 = y_2, \\ z_1 + 2z_2 + 3z_3 = y_3. \end{cases}$$

La troisième équation moins la deuxième donne $z_3 = y_3 - y_2$. La deuxième moins la première donne $z_2 + z_3 = y_2 - y_1$, donc $z_2 = -y_1 + 2y_2 - y_3$. La première fournit alors $z_1 = 2y_1 - y_2$.

Pour chaque y , le système a une unique solution, dont les coordonnées sont linéaires en celles de y . Il en résulte que C_0 est inversible et :

$$C_0^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 — Factorisation issue des carrés

Posons $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Un produit direct donne $C_0 = {}^t T T$. La matrice triangulaire T

est inversible, ses coefficients diagonaux étant non nuls, et :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie cette dernière identité en multipliant T par la matrice affichée. L'inverse du produit donne ensuite :

$$C_0^{-1} = T^{-1t}(T^{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première méthode fournit un calcul de système réutilisable ; la seconde explique simultanément la positivité et l'inversibilité par une factorisation triangulaire.

d) Expression de la forme associée à l'inverse

À partir de l'inverse calculé :

$$C_0^{-1}x = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$${}^t x C_0^{-1} x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

e) Positivité stricte pour l'inverse

Méthode 1 — Somme de carrés

L'expression précédente se réécrit :

$${}^t x C_0^{-1} x = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2.$$

Elle est positive ou nulle. Sa nullité entraîne $x_1 = 0$, puis $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$. Elle est donc strictement positive pour $x \neq 0$.

Méthode 2 — Changement de vecteur

Pour $x \neq 0$, posons $y = C_0^{-1}x$. L'inversibilité entraîne $y \neq 0$ et $x = C_0 y$. Par symétrie de C_0 :

$${}^t x C_0^{-1} x = {}^t (C_0 y) y = {}^t y C_0 y > 0,$$

la dernière inégalité venant de 1.b. La somme de carrés donne une vérification concrète ; le changement de vecteur fonctionne pour toute matrice symétrique strictement positive.

2°) Inversibilité de la matrice C

a) Symétrie de la forme bilinéaire

Le produit d'une ligne de taille n , d'une matrice réelle d'ordre n et d'une colonne de taille n est une matrice réelle de taille 1×1 , identifiée à un réel. Ce scalaire est égal à sa transposée. Comme ${}^t C = C$:

$${}^t x C y = {}^t ({}^t x C y) = {}^t y {}^t C x = {}^t y C x.$$

b) Noyau et inversibilité

Si $Cx = 0$, alors $Q(x) = {}^t x C x = {}^t x 0 = 0$. L'hypothèse $Q(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ impose $x = 0$. Ainsi $\text{Ker } C = \{0\}$.

L'application linéaire associée à C est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^n$. Le théorème du rang donne un rang égal à n ; elle est bijective. Par conséquent C est inversible.

c) Symétrie de l'inverse

Transposons les deux égalités d'inversion, en utilisant ${}^tC = C$:

$${}^t(C^{-1})C = I_n \quad \text{et} \quad C^t(C^{-1}) = I_n.$$

La matrice ${}^t(C^{-1})$ est donc un inverse de C . Par unicité de cet inverse, ${}^t(C^{-1}) = C^{-1}$. L'inverse est une matrice réelle symétrique.

d) Positivité de l'inverse et inégalité stricte

Pour $x \neq 0$, posons $y = C^{-1}x$. Alors $y \neq 0$ et $x = Cy$. La symétrie donne :

$${}^txC^{-1}x = {}^t(Cy)y = {}^tyCy > 0.$$

Notons $A = {}^tuC^{-1}u$, $B = {}^tuC^{-1}v$ et $D = {}^tvC^{-1}v$. Les vecteurs u, v sont non nuls, donc $A > 0$ et $D > 0$. En développant et en utilisant la symétrie de C^{-1} :

$${}^t(u + \lambda v)C^{-1}(u + \lambda v) = A + 2B\lambda + D\lambda^2.$$

Méthode 1 — Minimum du trinôme

L'indépendance linéaire de u, v interdit $u + \lambda v = 0$ pour tout réel λ . Le trinôme est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. En particulier, au réel $\lambda = -B/D$:

$$A - \frac{B^2}{D} > 0.$$

Comme $D > 0$, cela donne $B^2 < AD$, soit exactement :

$$({}^tuC^{-1}v)^2 < ({}^tuC^{-1}u)({}^tvC^{-1}v).$$

Méthode 2 — Produit scalaire associé à l'inverse

L'application $(z, w) \mapsto [z, w] = {}^t z C^{-1} w$ est bilinéaire, symétrique et strictement positive sur la diagonale pour $z \neq 0$. C'est donc un produit scalaire réel. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $[u, v]^2 \leq [u, u][v, v]$, avec égalité si et seulement si u, v sont liés. Leur indépendance rend l'inégalité stricte : $B^2 < AD$.

La première méthode suit le trinôme demandé ; la seconde identifie la structure euclidienne qui explique cette inégalité.

3°) Minimisation sous une contrainte

a) Développement le long d'une direction

La bilinéarité et la symétrie de C donnent :

$$Q(x + \lambda h) = {}^t x C x + \lambda {}^t x C h + \lambda {}^t h C x + \lambda^2 {}^t h C h.$$

D'après 2.a, les deux termes mixtes sont égaux. D'où :

$$Q(x + \lambda h) = Q(x) + 2\lambda \langle h, Cx \rangle + \lambda^2 Q(h).$$

b) Condition nécessaire

Si $\langle u, h \rangle = 0$, alors $\langle u, \lambda h \rangle = 0$ pour chaque réel λ . L'hypothèse appliquée à λh , puis 3.a, donne :

$$2\lambda \langle h, Cx \rangle + \lambda^2 Q(h) \geq 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Méthode 1 — Choix du minimum du trinôme

Pour $h = 0$, le produit scalaire demandé vaut zéro. Si $h \neq 0$, alors $Q(h) > 0$. Posons $L = \langle h, Cx \rangle$ et choisissons $\lambda = -L/Q(h)$. L'inégalité devient $-L^2/Q(h) \geq 0$, ce qui impose $L = 0$.

Ainsi Cx est orthogonal à tout vecteur de $u^\perp$, où $u^\perp = \text{Vect}(u)^\perp$. Le préliminaire donne :

$$Cx \in (u^\perp)^\perp = \text{Vect}(u).$$

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Cx = \alpha u$, et l'inversibilité entraîne $x = \alpha C^{-1}u$.

Méthode 2 — Dérivation d'une restriction

Pour chaque $h \in u^\perp$, la fonction polynomiale $g(\lambda) = Q(x + \lambda h)$ a un minimum global en 0. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la condition nécessaire d'extremum intérieur donne $g'(0) = 0$. Or 3.a donne $g'(0) = 2\langle h, Cx \rangle$. Ce produit scalaire est donc nul pour chaque $h \in u^\perp$; le double orthogonal conduit à nouveau à $Cx \in \text{Vect}(u)$, puis $x \in \text{Vect}(C^{-1}u)$.

La première méthode est purement algébrique; la seconde fait apparaître l'annulation de la dérivée dans toute direction admissible.

c) Condition suffisante

Si $Cx = \alpha u$ et $\langle u, h \rangle = 0$, alors $\langle h, Cx \rangle = \alpha \langle h, u \rangle = 0$. L'identité de 3.a avec $\lambda = 1$ devient :

$$Q(x + h) - Q(x) = Q(h) \geq 0.$$

La condition est donc suffisante. De plus, l'inégalité est stricte pour $h \neq 0$: sous la contrainte fixée, le minimiseur est unique dès qu'il existe.

d) Multiplicateur et valeur minimale

L'égalité $Cx = \alpha u$ implique $x = \alpha C^{-1}u$. En prenant le produit scalaire avec u :

$$\langle u, x \rangle = \alpha {}^t u C^{-1} u.$$

Comme $u \neq 0$, 2.d donne ${}^t u C^{-1} u > 0$. On peut donc poser :

$$a = \frac{1}{{}^t u C^{-1} u} > 0, \quad \alpha = a \langle u, x \rangle.$$

Enfin :

$$Q(x) = \langle x, Cx \rangle = \alpha \langle x, u \rangle = a(\langle u, x \rangle)^2.$$

Ces formules restent valables si $\langle u, x \rangle = 0$, auquel cas $\alpha = 0$ et $x = 0$.

4°) Minimisation sous deux contraintes

a) Condition nécessaire

Posons $F = \text{Vect}(u, v)$ et $H = F^\perp$. Par définition, $h \in H$ équivaut à $\langle u, h \rangle = \langle v, h \rangle = 0$.

Pour chaque $h \in H$ et chaque réel λ , le vecteur λh appartient encore à H . L'hypothèse et 3.a donnent :

$$2\lambda \langle h, Cx \rangle + \lambda^2 Q(h) \geq 0.$$

Si $h = 0$, le produit scalaire vaut zéro. Sinon $Q(h) > 0$ et, pour $\lambda = -\langle h, Cx \rangle / Q(h)$, l'inégalité impose $\langle h, Cx \rangle = 0$. Donc $Cx \in H^\perp = (F^\perp)^\perp = F$.

Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $Cx = \alpha u + \beta v$. En multipliant par C^{-1} :

$$x = \alpha C^{-1}u + \beta C^{-1}v \in \text{Vect}(C^{-1}u, C^{-1}v).$$

b) Condition suffisante

Si $Cx = \alpha u + \beta v$ et $h \in H$, alors $\langle h, Cx \rangle = \alpha \langle h, u \rangle + \beta \langle h, v \rangle = 0$. Ainsi :

$$Q(x + h) - Q(x) = Q(h) \geq 0.$$

C'est strict lorsque $h \neq 0$, d'où l'unicité du minimum sur tout ensemble de contraintes fixé, lorsqu'un tel vecteur x existe.

c) Système, coefficients et valeur minimale

Pour alléger les calculs, définissons :

$$A = {}^t u C^{-1} u, \quad B = {}^t u C^{-1} v = {}^t v C^{-1} u, \quad D = {}^t v C^{-1} v,$$

$$s = \langle u, x \rangle, \quad t = \langle v, x \rangle.$$

D'après 2.d, $A > 0$, $D > 0$ et $\Delta = AD - B^2 > 0$. Ici Δ désigne seulement ce nombre réel obtenu à partir des produits scalaires.

L'égalité $x = \alpha C^{-1}u + \beta C^{-1}v$, multipliée scalairement par u puis par v , donne :

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta = s, \\ B\alpha + D\beta = t. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par D et la seconde par B , puis en soustrayant, on obtient $\Delta\alpha = Ds - Bt$. De même, la seconde multipliée par A moins la première multipliée par B donne $\Delta\beta = At - Bs$. Comme $\Delta > 0$:

$$\alpha = \frac{D}{\Delta}s - \frac{B}{\Delta}t, \quad \beta = -\frac{B}{\Delta}s + \frac{A}{\Delta}t.$$

Ces valeurs vérifient le système : par exemple $A\alpha + B\beta = (AD - B^2)s/\Delta = s$; la seconde vérification donne t . Elles forment donc l'unique solution. Avec :

$$a = \frac{D}{\Delta} > 0, \quad b = \frac{B}{\Delta}, \quad c = \frac{A}{\Delta} > 0,$$

on obtient les expressions demandées. Le signe de b n'est pas imposé à ce stade.

Enfin, en utilisant $Cx = \alpha u + \beta v$:

$$Q(x) = \langle x, Cx \rangle = \alpha s + \beta t = as^2 - 2bst + ct^2.$$

Les coefficients dépendent seulement de u, v, C^{-1} . On notera pour la suite :

$$ac - b^2 = \frac{AD - B^2}{\Delta^2} = \frac{1}{\Delta} > 0.$$

PARTIE II

5°) Covariance de deux variables aléatoires

Avant d'utiliser les espérances de produits, vérifions leur existence. Les variances finies et les espérances finies donnent $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 < \infty$ et de même pour Y .

L'inégalité $2|XY| \leq X^2 + Y^2$ garantit $E(|XY|) < \infty$. En posant $U = X - E(X)$ et

$W = Y - E(Y)$, on a également $2|UW| \leq U^2 + W^2$, donc le produit centré est intégrable. Toutes les expansions suivantes sont légitimes.

a) Variance d'une combinaison

La linéarité de l'espérance donne $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$. La variable centrée associée est donc $\lambda U + W$. Son carré est intégrable puisque $(\lambda U + W)^2 \leq 2\lambda^2 U^2 + 2W^2$. En développant :

$$V(\lambda X + Y) = E[(\lambda U + W)^2] = \lambda^2 E(U^2) + 2\lambda E(UW) + E(W^2).$$

Par définition des variances et de la covariance :

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) Inégalité et cas d'égalité

Méthode 1 — Minimum du trinôme de variance

Notons $A = V(X) > 0$, $B = \text{Cov}(X, Y)$ et $D = V(Y) \geq 0$. Une variance est toujours positive ou nulle, donc $A\lambda^2 + 2B\lambda + D \geq 0$ pour tout réel λ . Au réel $\lambda_0 = -B/A$, on obtient $D - B^2/A \geq 0$, soit :

$$B^2 \leq AD.$$

Pour l'égalité, rappelons le fait élémentaire suivant : une variable Z de variance finie vérifie $V(Z) = 0$ si et seulement si $Z = E(Z)$ presque sûrement. En effet, si $V(Z) = 0$, pour chaque $\varepsilon > 0$, Markov appliqué à $(Z - E(Z))^2$ donne $P(|Z - E(Z)| \geq \varepsilon) = 0$. La continuité monotone des probabilités, appliquée aux événements $\{|Z - E(Z)| \geq 1/k\}$, entraîne $P(Z \neq E(Z)) = 0$. La réciproque résulte directement de la définition.

Si $B^2 = AD$, alors 5.a donne $V(\lambda_0 X + Y) = 0$. Ainsi $\lambda_0 X + Y = \mu$ presque sûrement, avec $\mu = \lambda_0 E(X) + E(Y)$.

Réciproquement, si $\lambda X + Y = \mu$ presque sûrement, alors en prenant l'espérance et en centrant on obtient $W = -\lambda U$. Donc $B = E(UW) = -\lambda A$ et $D = E(W^2) = \lambda^2 A$. Par conséquent $B^2 = AD$.

L'équivalence demandée est établie, y compris si $V(Y) = 0$: dans ce cas $Y = E(Y)$ presque sûrement, $B = 0$, et on peut prendre $\lambda = 0$.

Méthode 2 — Projection du résidu centré

Considérons le résidu $Z = W - (B/A)U$, bien défini car $A > 0$. Un développement de son carré, dont tous les termes sont intégrables, donne :

$$E(Z^2) = D - 2\frac{B}{A}B + \frac{B^2}{A^2}A = D - \frac{B^2}{A} \geq 0.$$

D'où $B^2 \leq AD$. L'égalité équivaut à $E(Z^2) = 0$, donc à $Z = 0$ presque sûrement par le même argument de Markov. Ainsi $Y = (B/A)X + E(Y) - (B/A)E(X)$ presque sûrement, ce qui est une relation $\lambda X + Y = \mu$.

Réciproquement, une telle relation donne $W = -\lambda U$, puis $B = -\lambda A$ et $D = \lambda^2 A$, donc l'égalité. La première méthode suit l'indication du sujet ; la seconde interprète l'égalité comme l'absence de résidu après ajustement affine.

c) Coefficient de corrélation

Question adaptée au programme actuel : on ajoute $V(Y) > 0$, nécessaire pour que la corrélation soit définie. L'hypothèse originale $V(X) > 0$ seule ne suffit pas.

Posons $\sigma_X = \sqrt{V(X)} > 0$ et $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} > 0$. Le coefficient est :

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

L'inégalité de 5.b donne $\rho^2 \leq 1$, donc $-1 \leq \rho \leq 1$. D'après le cas d'égalité, $|\rho| = 1$ si et seulement si $Y = kX + d$ presque sûrement, avec $k, d \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$. La pente est non nulle car $V(Y) > 0$.

Dans ce cas $V(Y) = k^2 V(X)$ et $\text{Cov}(X, Y) = kV(X)$, donc $\rho = k/|k|$. Ainsi :

$$\rho = 1 \iff Y = kX + d \text{ presque sûrement pour une pente } k > 0,$$

$$\rho = -1 \iff Y = kX + d \text{ presque sûrement pour une pente } k < 0.$$

De manière équivalente, $\rho = 1$ correspond à $W/\sigma_Y = U/\sigma_X$ presque sûrement, et $\rho = -1$ à $W/\sigma_Y = -U/\sigma_X$ presque sûrement.

6°) Portefeuilles à deux actifs

a) Espérance et variance

Les deux rendements ont des moments d'ordre deux finis. Toute combinaison linéaire en a également : par exemple $R^2 \leq 2x^2 R_1^2 + 2(1-x)^2 R_2^2$. La linéarité de l'espérance et la bilinéarité de la covariance donnent :

$$E(R) = xm_1 + (1-x)m_2 = m_2 + (m_1 - m_2)x,$$

$$V(R) = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\rho\sigma_1\sigma_2.$$

Aucune indépendance n'est supposée. Le terme de covariance est conservé et les formules restent valables pour tout réel x , notamment en présence de ventes à découvert.

b) Variance en fonction de l'espérance

Posons $d = m_1 - m_2 \neq 0$ et $\kappa = \rho\sigma_1\sigma_2$. L'équation de l'espérance donne $x = (m - m_2)/d$ et $1 - x = (m_1 - m)/d$. Donc :

$$V = \frac{\sigma_1^2(m - m_2)^2 + \sigma_2^2(m_1 - m)^2 + 2\kappa(m - m_2)(m_1 - m)}{d^2}.$$

En utilisant $(m - m_2)(m_1 - m) = -m^2 + (m_1 + m_2)m - m_1m_2$, on obtient

$V = a - 2bm + cm^2$ avec :

$$a = \frac{\sigma_1^2 m_2^2 + \sigma_2^2 m_1^2 - 2\kappa m_1 m_2}{d^2},$$

$$b = \frac{\sigma_1^2 m_2 + \sigma_2^2 m_1 - \kappa(m_1 + m_2)}{d^2},$$

$$c = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\kappa}{d^2}.$$

Pour vérifier les signes sans supposer ceux des espérances, considérons la forme :

$$G(z_1, z_2) = \sigma_1^2 z_1^2 + 2\kappa z_1 z_2 + \sigma_2^2 z_2^2 = (\sigma_1 z_1 + \rho \sigma_2 z_2)^2 + (1 - \rho^2) \sigma_2^2 z_2^2.$$

Comme $|\rho| < 1$ et $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $G(z_1, z_2) > 0$ pour toute paire non nulle : si $z_2 \neq 0$, le deuxième carré pondéré est strictement positif ; si $z_2 = 0$ et $z_1 \neq 0$, le premier l'est.

Le numérateur de a est $G(-m_2, m_1)$. Cette paire n'est pas nulle, car $m_1 \neq m_2$. Celui de c est $G(1, -1) > 0$. Puisque $d^2 > 0$, $a > 0$ et $c > 0$. Ces trois coefficients sont indépendants de x et de m .

7°) Matrice de variances-covariances

a) Variance d'une combinaison linéaire

Notons $U_i = R_i - m_i$, de sorte que $E(U_i) = 0$ et $E(U_i^2) = \sigma_i^2 < \infty$. Pour chaque paire, $2|U_i U_j| \leq U_i^2 + U_j^2$ assure l'intégrabilité du produit.

La variable

$$S = \sum_{i=1}^n x_i R_i$$

possède un moment d'ordre deux fini : Cauchy-Schwarz sur les n coordonnées réelles

donne

$$S^2 \leq \left(\sum_i x_i^2\right) \left(\sum_i R_i^2\right),$$

dont l'espérance est finie. Les sommes ci-dessous sont finies ; il n'y a aucun échange avec une limite.

Comme

$$S - E(S) = \sum_i x_i U_i :$$

$$V(S) = E \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i U_i \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E(U_i U_j).$$

Or $E(U_i U_j) = \text{Cov}(R_i, R_j) = c_{ij}$. Ainsi :

$$V(S) = \sum_{i,j=1}^n x_i c_{ij} x_j = {}^t x C x.$$

L'identité ne requiert pas l'indépendance des rendements.

b) Positivité et condition de positivité stricte

D'après 7.a, ${}^t x C x$ est une variance : il est donc positif ou nul. Il est nul si et seulement si

$$\sum_i x_i R_i$$

est presque sûrement constante, ou encore :

$$\sum_{i=1}^n x_i (R_i - m_i) = 0 \quad \text{presque sûrement.}$$

La condition nécessaire et suffisante demandée est donc que seule la combinaison à coefficients tous nuls puisse être presque sûrement constante :

$$\left[\sum_{i=1}^n x_i (R_i - m_i) = 0 \text{ presque sûrement} \right] \implies x_1 = \dots = x_n = 0.$$

Autrement dit, aucun vecteur non nul de coefficients ne produit un rendement constant presque sûrement. Cette condition porte sur la famille des rendements centrés ; elle ne doit pas être confondue avec l'indépendance probabiliste ni avec une simple condition sur chaque paire.

Sous cette hypothèse, C est symétrique et $Q(x) > 0$ pour $x \neq 0$: toute la partie I s'applique.

8°) Portefeuilles efficaces dans le cas général

a) Contraintes de composition et de gain

Les x_i sont les proportions, éventuellement négatives, de la valeur initiale totale du portefeuille affectées aux différents actifs. Après normalisation par cette valeur totale non nulle, leur somme vaut 1 :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(R) = \sum_i x_i E(R_i) = \sum_i m_i x_i.$$

L'espérance prescrite étant m :

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = m.$$

Pour la suite, posons $u = (1, \dots, 1)^t$ et $v = (m_1, \dots, m_n)^t$. Ces contraintes s'écrivent $\langle u, x \rangle = 1$ et $\langle v, x \rangle = m$.

Les vecteurs u, v sont indépendants : si $v = ku$, tous les m_i seraient égaux à k , contrairement à l'hypothèse. L'ensemble des portefeuilles d'espérance m est non vide pour tout réel m . En effet, choisissons i, j tels que $m_i \neq m_j$, puis prenons $x_i = (m - m_j)/(m_i - m_j)$, $x_j = 1 - x_i$, et tous les autres coefficients nuls. Les deux contraintes sont alors vérifiées.

b) Reformulation de l'efficacité

Un autre portefeuille y a les mêmes contraintes que x si et seulement si $h = y - x$ vérifie :

$$\langle u, h \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle v, h \rangle = 0.$$

En effet, la différence des égalités pour y et pour x donne ces relations ; réciproquement elles impliquent que $y = x + h$ a une somme de proportions égale à 1 et une espérance égale à m .

D'après 7.a, les variances de ces deux portefeuilles sont $Q(x)$ et $Q(x + h)$. La variance de x est minimale parmi les portefeuilles d'espérance m si et seulement si :

$$Q(x) \leq Q(x + h) \quad \text{pour tout } h \in \text{Vect}(u, v)^\perp.$$

C'est exactement la condition de I.4.

c) Formule de la variance minimale

Question adaptée au programme actuel : la formule concerne les portefeuilles efficaces. Cette restriction, implicite dans l'intention de la question originale, est rendue explicite ; elle serait fausse pour tous les portefeuilles admissibles lorsque $n \geq 3$.

Appliquons I.4 aux vecteurs indépendants u, v définis en 8.a et à la matrice C vérifiant la positivité stricte de 7.b. Posons :

$$A = {}^t u C^{-1} u, \quad B = {}^t u C^{-1} v, \quad D = {}^t v C^{-1} v, \quad \Delta = AD - B^2 > 0.$$

Les coefficients sont :

$$a = \frac{D}{\Delta} > 0, \quad b = \frac{B}{\Delta}, \quad c = \frac{A}{\Delta} > 0.$$

Ils dépendent des espérances des actifs et de leur matrice de covariances, mais pas de l'espérance cible m . Pour un portefeuille efficace, les contraintes $\langle u, x \rangle = 1$ et $\langle v, x \rangle = m$ donnent, par I.4.c :

$$V = Q(x) = a - 2bm + cm^2.$$

Vérifions aussi que cette valeur est effectivement atteinte pour chaque m , sans supposer l'existence d'un minimiseur. Définissons :

$$x_*(m) = (a - bm)C^{-1}u + (-b + cm)C^{-1}v.$$

Les identités issues des coefficients donnent :

$$\langle u, x_*(m) \rangle = A(a - bm) + B(-b + cm) = \frac{AD - B^2}{\Delta} = 1,$$

$$\langle v, x_*(m) \rangle = B(a - bm) + D(-b + cm) = \frac{AD - B^2}{\Delta} m = m.$$

Ce portefeuille est donc admissible. De plus

$Cx_*(m) = (a - bm)u + (-b + cm)v \in \text{Vect}(u, v)$. I.4.b montre qu'il est efficace.

Si y est un autre portefeuille de même espérance, posons $h = y - x_*(m)$. Les contraintes donnent $h \in \text{Vect}(u, v)^\perp$, et 3.a entraîne :

$$Q(y) = Q(x_*(m)) + Q(h).$$

Puisque $Q(h) > 0$ pour $h \neq 0$, ce minimum est unique. Cette identité explique aussi pourquoi la formule décrit uniquement la variance minimale : les autres portefeuilles ont une variance plus élevée.

Enfin $ac - b^2 = 1/\Delta > 0$. La variance minimale globale sera donc strictement positive.

d) Courbe et frontière efficace

La fonction $f(m) = a - 2bm + cm^2$ est un polynôme du second degré avec $c > 0$. Sa courbe dans le plan où m est en abscisse et V en ordonnée est une parabole tournée vers le haut. En complétant le carré :

$$f(m) = c \left(m - \frac{b}{c} \right)^2 + a - \frac{b^2}{c}.$$

Son sommet est :

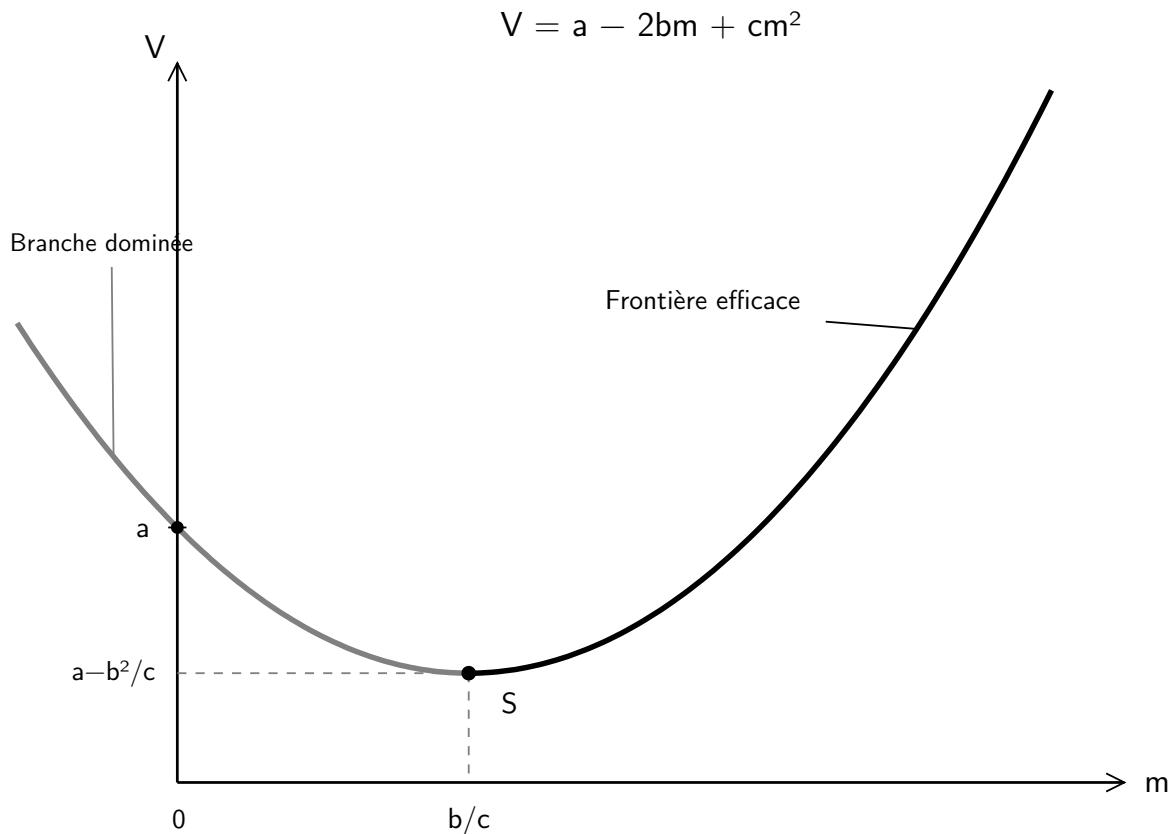
$$S = \left(\frac{b}{c}, a - \frac{b^2}{c} \right).$$

Sa dérivée vaut $f'(m) = 2c(m - b/c)$. Elle décroît strictement sur $(-\infty, b/c]$ et croît strictement sur $[b/c, +\infty)$. Avec les coefficients de 8.c, on peut préciser :

$$m_0 = \frac{b}{c} = \frac{B}{A}, \quad V_{\min} = a - \frac{b^2}{c} = \frac{1}{A} > 0.$$

Sous l'hypothèse supplémentaire $b > 0$, le sommet a une abscisse positive. La parabole coupe l'axe des ordonnées au niveau $a > V_{\min}$.

La représentation ci-dessous est symbolique, avec des échelles indépendantes sur les deux axes et sans graduation numérique. Elle utilise la formule exacte $V = V_{\min} + (b^2/c)(cm/b - 1)^2$; les graduations indiquées sont les valeurs symboliques correspondantes. Le niveau de l'axe horizontal n'est pas utilisé comme une graduation de variance.



Pour expliquer la branche intéressante, adoptons le critère annoncé dans le problème : un investisseur préfère une espérance plus grande à variance égale, et une variance plus petite à espérance égale.

Si $m < m_0 = b/c$, considérons $m' = 2m_0 - m$. Alors $m' > m_0$ et $m' > m$, mais :

$$f(m') = c(m' - m_0)^2 + V_{\min} = c(m - m_0)^2 + V_{\min} = f(m).$$

Le portefeuille efficace d'espérance m' existe par 8.c et offre une espérance supérieure avec exactement la même variance. Celui d'espérance m est donc dominé selon ce critère. Il est aussi dominé par le portefeuille au sommet, qui possède à la fois une espérance supérieure et une variance moindre.

À l'inverse, si $m \geq m_0$, aucune espérance $m' > m$ ne peut être obtenue avec une variance inférieure ou égale à $f(m)$: même la variance minimale $f(m')$ est strictement supérieure à $f(m)$, car f est strictement croissante sur cette branche. À espérance égale, 8.c montre que tout autre portefeuille a une variance strictement supérieure.

La frontière efficace au sens du compromis espérance-variance est donc :

$$\{(m, f(m)) \mid m \geq b/c\}.$$

Le terme « efficace » défini avant 8.a signifie d'abord variance minimale à espérance fixée ; toute la parabole vérifie cette première définition. La préférence pour un gain supérieur à risque égal sélectionne ensuite sa branche droite, sommet inclus, comme frontière de Markowitz.

Relevé des adaptations

- 5.c : ajout de l'hypothèse $V(Y) > 0$. Sans elle, le coefficient de corrélation peut être indéfini, bien que 5.a et 5.b restent valables. La correction est locale et préserve le cas $V(Y) = 0$ dans 5.b.
- 8.c : précision « pour les portefeuilles efficaces ». La formule obtenue en I.4 décrit un minimum sous les contraintes ; elle ne vaut pas pour toutes les compositions de portefeuille. La construction du minimiseur et son unicité sont établies dans le corrigé.

Aucune question n'est supprimée ou admise ; aucune conversion de code n'est nécessaire.