



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

2000

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On considère un combat entre trois tireurs A, B, C , qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $2/3$.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/2$.
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/3$.
- Lorsqu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- À chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

Ainsi, à la première épreuve, A vise B , tandis que B et C visent A .

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

- ABC_n : « à l'issue de la n -ième épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».
- AB_n : « à l'issue de la n -ième épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés ».
- On définit de façon analogue les événements BC_n et CA_n .
- A_n : « à l'issue de la n -ième épreuve, seul A n'est pas éliminé ».
- On définit de façon analogue les événements B_n et C_n .
- $\emptyset_n$: « à l'issue de la n -ième épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».

Le symbole $\emptyset_n$ désigne ici cet événement, et non l'événement impossible en général.

Après la fin du combat, l'état des tireurs est conservé pour définir ces événements à tout rang ultérieur.

Enfin, ABC_0 est l'événement certain ; $AB_0, BC_0, CA_0, A_0, B_0, C_0, \emptyset_0$ sont l'événement impossible. On note $p(E \mid F)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F , lorsque $p(F) > 0$.

PARTIE I

On détermine dans cette partie les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

1°) Calcul de probabilités

- a) Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $p(U \cup V)$ de l'événement $U \cup V$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.
- b) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C : « A rate son tir et B ou C réussissent leur tir ».
- c) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C : « A réussit son tir et B ou C réussissent leur tir ».

2°) Détermination de probabilités conditionnelles

- a) Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout entier naturel n .

Dans la suite, on ne considérera donc que les événements $ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n, \emptyset_n$.

- b) Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1} \mid ABC_n)$, pour $n \geq 0$.
- c) Expliciter $p(BC_{n+1} \mid ABC_n)$ à l'aide de la question 1°, puis donner $p(CA_{n+1} \mid ABC_n)$, pour $n \geq 0$.

- d)** Expliciter $p(A_{n+1} \mid ABC_n)$, $p(B_{n+1} \mid ABC_n)$ et $p(C_{n+1} \mid ABC_n)$, pour $n \geq 0$.
- e)** Expliciter $p(A_{n+1} \mid CA_n)$, $p(B_{n+1} \mid BC_n)$, $p(C_{n+1} \mid CA_n)$ et $p(C_{n+1} \mid BC_n)$, pour $n \geq 1$.
- f)** Expliciter $p(\emptyset_{n+1} \mid ABC_n)$, pour $n \geq 0$, ainsi que $p(\emptyset_{n+1} \mid BC_n)$ et $p(\emptyset_{n+1} \mid CA_n)$, pour $n \geq 1$.

3°) Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est-à-dire au-delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

- a)** Quelle est la probabilité de l'événement $T = 1$?
- b)** Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant :

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n.$$

- c)** Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants, pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_n.$$

Pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_n$.

- d)** Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants, pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \dots \cap BC_n.$$

Pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$.

- e)** Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité $p(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la n -ième épreuve, et en déduire la probabilité $p(T = n)$. On vérifiera que cette formule redonne bien, pour $n = 1$, le résultat obtenu à la question a).

- f) Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T = n)$, avec $n \geq 1$, est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T .

4°) Probabilités pour que A, B, C remportent le combat

- a) Montrer que l'événement « A remporte le combat à l'issue de la n -ième épreuve » est impossible si $n = 1$, et montrer qu'il est égal à la réunion des événements suivants si $n \geq 2$:

$$ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n, \text{ pour } 0 \leq k \leq n-2.$$

Pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n$.

- b) Calculer la probabilité pour que A remporte le combat à l'issue de la n -ième épreuve, avec $n \geq 2$.
- c) En déduire la probabilité pour que A remporte le combat, c'est-à-dire pour qu'il ne soit pas éliminé à l'issue du combat.
- d) Déterminer de même la probabilité pour que B remporte le combat.
- e) Déterminer de même la probabilité pour que C remporte le combat.

PARTIE II

Dans cette partie, on retrouve par des méthodes matricielles les probabilités pour que A, B, C remportent le combat, en n'utilisant que les résultats des questions I.1° et I.2°.

1°) Expression de la matrice de transition M

- a) On considère la matrice-colonne E_n à sept lignes dont les sept éléments sont, dans cet ordre, du haut vers le bas : $p(ABC_n), p(BC_n), p(CA_n), p(A_n), p(B_n), p(C_n), p(\emptyset_n)$.

Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant, pour tout entier naturel n :

$$E_{n+1} = ME_n.$$

On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice M est égale à 1.

b) En déduire E_n en fonction de n , de M et de E_0 .

2°) Calcul des puissances de la matrice M

a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées U', U'' et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées V', V'' . On forme les matrices carrées d'ordre 7 :

$$M' = \begin{pmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{pmatrix}, M'' = \begin{pmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{pmatrix},$$

où O désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et I_4 la matrice identité d'ordre 4.

Vérifier, à l'aide des règles du produit matriciel, l'égalité suivante :

$$M'M'' = \begin{pmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{pmatrix}.$$

b) Expliciter les matrices U et V telles que :

$$M = \begin{pmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{pmatrix}.$$

c) Établir enfin, par récurrence sur $n \geq 1$, l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{pmatrix} U^n & O \\ V + VU + \dots + VU^{n-1} & I_4 \end{pmatrix}.$$

3°) Diagonalisation de la matrice U

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de U , avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :

- la première composante de V_1 vaut 1 ;
- la troisième composante de V_2 vaut 1 ;
- la deuxième composante de V_3 vaut 1.

b) On note P la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre, V_1, V_2, V_3 .

Expliciter la matrice inverse P^{-1} et préciser la matrice $D = P^{-1}UP$.

4°) Calcul de la limite des puissances de la matrice M

a) Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1}$, pour $n \geq 1$.

b) On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X à p lignes et q colonnes si chaque coefficient de la matrice X_n converge, quand n tend vers $+\infty$, vers le coefficient correspondant de la matrice X .

On admettra, sous réserve d'existence, que la limite d'un produit est le produit des limites.

Expliciter, à l'aide des résultats précédents, les limites des deux suites matricielles (D^n) et $(I_3 + D + D^2 + \dots + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles (U^n) , $(I_3 + U + U^2 + \dots + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + \dots + VU^{n-1})$.

c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles (M^n) et (E_n) .

d) Vérifier que les suites $(p(ABC_n))$, $(p(BC_n))$ et $(p(CA_n))$ convergent vers 0, et expliciter sous forme de fractions irréductibles les limites des suites $(p(A_n))$, $(p(B_n))$, $(p(C_n))$, $(p(\emptyset_n))$.

Retrouver alors les probabilités obtenues en I pour que A , B , C remportent le combat.