



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

2000

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I

Les tirs d'une nouvelle épreuve sont indépendants des tirs précédents.

Conditionnellement à la liste des tireurs encore présents, les probabilités de réussite restent donc $2/3$, $1/2$ et $1/3$. Le caractère simultané des tirs signifie qu'un tireur atteint au cours d'une épreuve a néanmoins effectué son propre tir pendant cette épreuve.

Pour alléger les calculs, on utilisera les trois constantes $a = 1/9$, $b = 1/3$, $c = 2/9$. Elles sont strictement comprises entre 0 et 1.

1°) Calcul de probabilités

a) Méthode 1 — Décomposition en événements disjoints

L'union $U \cup V$ est la réunion disjointe de U et $V \setminus U$. De plus, V est la réunion disjointe de $V \setminus U$ et $U \cap V$. L'additivité donne donc :

$$p(U \cup V) = p(U) + p(V \setminus U) = p(U) + p(V) - p(U \cap V).$$

Cette formule ne nécessite aucune hypothèse d'indépendance.

Méthode 2 — Variables indicatrices

Pour tout événement F , la variable $\mathbf{1}_F$ vaut 1 sur F et 0 ailleurs, et son espérance vaut $p(F)$. En distinguant les quatre possibilités d'appartenance à U et à V , on vérifie :

$$\mathbf{1}_{U \cup V} = \mathbf{1}_U + \mathbf{1}_V - \mathbf{1}_{U \cap V}.$$

Ces variables sont bornées, donc intégrables. La linéarité de l'espérance redonne :

$$p(U \cup V) = p(U) + p(V) - p(U \cap V).$$

La première méthode est une décomposition d'ensembles ; la seconde est utile lorsque des probabilités d'événements interviennent dans un calcul d'espérance.

- b) Notons R_A, R_B, R_C les événements de réussite des trois tirs pendant l'épreuve considérée.

Méthode 1 — Formule de l'union

L'indépendance donne $p(R_B \cap R_C) = (1/2)(1/3) = 1/6$. Ainsi, par a) :

$$p(R_B \cup R_C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

L'événement $R_B \cup R_C$ dépend seulement des tirs de B et C ; il est indépendant de $\overline{R_A}$. Par conséquent :

$$p(\overline{R_A} \cap (R_B \cup R_C)) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Méthode 2 — Événement complémentaire

L'événement « au moins un des tirs de B et C réussit » est le complément de « les deux tirs échouent ». L'indépendance des deux tirs donne :

$$p(R_B \cup R_C) = 1 - p(\overline{R_B} \cap \overline{R_C}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

L'échec de A est indépendant de cet événement. La probabilité demandée est donc $(1/3)(2/3) = 2/9$.

La méthode de l'union suit la consigne « en déduire » ; le complément évite de calculer une intersection de réussites et s'étend facilement à davantage de tireurs indépendants.

- c) Le tir de A est indépendant des deux autres tirs. En utilisant la probabilité $2/3$ obtenue en b), on a :

$$p(R_A \cap (R_B \cup R_C)) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

2°) Détermination de probabilités conditionnelles

- a) Pour que A et B soient encore présents après une épreuve, ils doivent avoir été présents à toutes les épreuves précédentes, puisque toute élimination est définitive. Tant que A et B sont présents, A vise B , B vise A et, s'il est présent, C vise A . Personne ne vise donc C .

Ainsi, si A et B sont toujours présents, C n'a pu être éliminé : l'état où seuls A et B subsistent est impossible. Cela vaut aussi pour $n = 0$ par la convention initiale. On conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p(AB_n) = 0.$$

- b) Question adaptée au programme actuel : l'indice est explicité à $n \geq 0$.

À partir de l'état ABC_n , les trois tireurs restent présents si et seulement si les trois tirs échouent. Par indépendance :

$$p(ABC_{n+1} \mid ABC_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} = a.$$

Le conditionnement est défini pour chaque $n \geq 0$: l'événement où tous les tirs des n premières épreuves échouent a une probabilité $(1/9)^n > 0$ et maintient les trois tireurs présents.

- c) Question adaptée au programme actuel : l'indice est explicité à $n \geq 0$.

L'état BC_{n+1} apparaît à partir de ABC_n lorsque A rate B , tandis que B ou C atteint A . La question I.1° b) donne :

$$p(BC_{n+1} \mid ABC_n) = \frac{2}{9}.$$

Pour obtenir CA_{n+1} , il faut que A atteigne B et que les deux tirs visant A échouent. Donc :

$$p(CA_{n+1} \mid ABC_n) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

- d) Question adaptée au programme actuel : l'indice est explicité à $n \geq 0$.

À partir de l'état où les trois tireurs sont présents, C n'est jamais visé. Il ne peut donc être éliminé pendant cette épreuve. Ainsi :

$$p(A_{n+1} \mid ABC_n) = 0, \quad p(B_{n+1} \mid ABC_n) = 0.$$

Pour que C reste seul, il faut que A atteigne B et que B ou C atteigne A . La question I.1° c) fournit :

$$p(C_{n+1} \mid ABC_n) = \frac{4}{9}.$$

e) Question adaptée au programme actuel : l'indice est précisé à $n \geq 1$, car les événements CA_0 et BC_0 sont impossibles et ne permettent pas un conditionnement.

Dans le duel CA , A et C se visent mutuellement. Pour que A reste seul, A doit réussir et C échouer ; pour que C reste seul, A doit échouer et C réussir. Par indépendance :

$$p(A_{n+1} \mid CA_n) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$p(C_{n+1} \mid CA_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Dans le duel BC , B et C se visent mutuellement. Les mêmes décompositions donnent :

$$p(B_{n+1} \mid BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$p(C_{n+1} \mid BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Les conditionnements sont définis pour tout $n \geq 1$. En effet, atteindre le duel au premier tour puis faire échouer les deux tirs à chacun des tours suivants a une probabilité strictement positive. On obtient respectivement les minoration

$$p(CA_n) \geq (2/9)(2/9)^{n-1} > 0 \text{ et } p(BC_n) \geq (2/9)(1/3)^{n-1} > 0.$$

f) Question adaptée au programme actuel : les conditionnements par BC_n et CA_n sont précisés pour $n \geq 1$.

À partir de ABC_n , C ne peut être éliminé ; les trois tireurs ne peuvent donc disparaître pendant cette épreuve :

$$p(\emptyset_{n+1} \mid ABC_n) = 0.$$

À partir d'un duel, aucun tireur ne subsiste si les deux tirs réussissent, même si chacun des tireurs est lui-même atteint. Donc :

$$p(\emptyset_{n+1} \mid BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$p(\emptyset_{n+1} \mid CA_n) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Pour la suite, relevons également les probabilités de rester dans un duel :

$$p(BC_{n+1} \mid BC_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = b,$$

$$p(CA_{n+1} \mid CA_n) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} = c.$$

Les états où il reste au plus un tireur sont conservés après la fin du combat.

3°) Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat

a) Le combat se termine au premier tour si et seulement si C reste seul : les états A_1, B_1 et $\emptyset_1$ sont impossibles. D'après I.2° d) :

$$p(T = 1) = \frac{4}{9}.$$

b) L'événement demandé correspond à n épreuves successives où les trois tireurs restent présents. À chaque étape, la probabilité conditionnelle correspondante est $a = 1/9$. La formule des probabilités composées donne :

$$p(ABC_1 \cap \dots \cap ABC_n) = a^n = \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

Comme les éliminations sont définitives, cet événement est aussi égal à ABC_n .

c) Pour $0 \leq k \leq n-1$, notons $H_{k,n}^{CA}$ l'événement décrit dans l'énoncé. Il correspond à k tours dans l'état ABC , puis à un passage de ABC vers CA , puis à $n-k-1$ tours supplémentaires dans l'état CA .

La formule des probabilités composées, avec I.2° b), c) et f), donne :

$$p(H_{k,n}^{CA}) = a^k \frac{2}{9} c^{n-k-1}.$$

Les événements $H_{k,n}^{CA}$ sont deux à deux disjoints : pour deux valeurs distinctes de k , le premier tour d'élimination de B ne peut être le même. Leur réunion est exactement CA_n , puisque le seul état à deux tireurs permettant de conserver A et C est CA .

Pour calculer la somme, on utilise l'identité finie suivante, valable pour $u \neq v$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-1-k} = \frac{v^n - u^n}{v - u}.$$

En effet, multiplier la somme par $v - u$ donne deux sommes dont les termes se compensent, sauf v^n et $-u^n$. Comme $c - a = 1/9$, on en déduit :

$$p(CA_n) = \frac{2}{9} \frac{c^n - a^n}{c - a} = 2(c^n - a^n) = 2 \left[\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right].$$

La formule reste vraie pour $n = 1$: elle donne $2/9$.

d) Notons $H_{k,n}^{BC}$ le chemin décrit dans la question. Les k premiers tours conservent ABC , le tour suivant élimine seulement A , puis $n - k - 1$ tours conservent le duel BC . Ainsi :

$$p(H_{k,n}^{BC}) = a^k \frac{2}{9} b^{n-k-1}.$$

Ces chemins sont deux à deux disjoints par unicité du premier tour d'élimination de A . Leur réunion est BC_n . L'identité finie établie en c), avec $b - a = 2/9$, donne :

$$p(BC_n) = \frac{2}{9} \frac{b^n - a^n}{b - a} = b^n - a^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

Cette formule est également valable pour $n = 1$ et donne $2/9$.

e) Le combat n'est pas terminé au rang n si et seulement si l'un des trois états disjoints ABC_n , BC_n , CA_n est réalisé. Par b), c) et d) :

$$p(T > n) = a^n + (b^n - a^n) + 2(c^n - a^n) = b^n + 2c^n - 2a^n.$$

Cette expression vaut également pour $n = 0$, car elle donne 1, et pour $n = 1$, où elle donne $5/9$.

Les trois puissances tendent vers 0. Par continuité décroissante des probabilités, la probabilité que le combat ne se termine jamais est donc nulle. On peut ainsi considérer T comme une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, en fixant arbitrairement sa valeur sur cet éventuel événement de probabilité nulle.

Pour tout $n \geq 1$, les événements $\{T > n\}$ sont emboîtés et :

$$p(T = n) = p(T > n - 1) - p(T > n).$$

En substituant la formule précédente :

$$p(T = n) = (1 - b)b^{n-1} + 2(1 - c)c^{n-1} - 2(1 - a)a^{n-1},$$

$$p(T = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{14}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \frac{16}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}.$$

Pour $n = 1$, on obtient $2/3 + 14/9 - 16/9 = 4/9$, conformément à a).

f) La somme des probabilités est télescopique :

$$\sum_{n=1}^N p(T = n) = p(T > 0) - p(T > N) = 1 - p(T > N).$$

Comme $p(T > N) \rightarrow 0$, il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(T = n) = 1.$$

Méthode 1 — Calcul direct de l'espérance à partir de la loi

Pour $0 \leq q < 1$, la série géométrique dérivée du programme donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

L'existence de l'espérance doit être justifiée avant son calcul. On a, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq np(T = n) \leq \frac{2}{3}nb^{n-1} + \frac{14}{9}nc^{n-1}.$$

Les deux séries du majorant convergent puisque $0 < b, c < 1$. La série définissant $E(T)$ converge donc. Chacune des trois séries utilisées ci-dessous converge absolument, ce qui autorise leur combinaison linéaire :

$$E(T) = \frac{2/3}{(1-1/3)^2} + \frac{14/9}{(1-2/9)^2} - \frac{16/9}{(1-1/9)^2},$$

$$E(T) = \frac{3}{2} + \frac{18}{7} - \frac{9}{4} = \frac{42 + 72 - 63}{28} = \frac{51}{28}.$$

Méthode 2 — Somme des probabilités de dépassement

On établit ici la formule nécessaire à partir d'une somme finie, sans intervertir des séries infinies. Pour tout entier $N \geq 1$, la décomposition des événements $\{T > j\}$ selon les valeurs de T donne :

$$\sum_{j=0}^{N-1} p(T > j) = \sum_{m=1}^N mp(T = m) + Np(T > N).$$

En effet, un événement $\{T = m\}$ avec $m \leq N$ est compté exactement m fois dans le membre de gauche, et un événement $\{T > N\}$ exactement N fois. De plus :

$$0 \leq Np(T > N) \leq Nb^N + 2Nc^N \rightarrow 0.$$

Cette limite découle des croissances comparées pour une puissance géométrique de raison strictement inférieure à 1. Le passage à la limite dans l'identité finie, l'espérance ayant déjà été justifiée, établit :

$$E(T) = \sum_{j=0}^{\infty} p(T > j) = \frac{1}{1-b} + \frac{2}{1-c} - \frac{2}{1-a} = \frac{3}{2} + \frac{18}{7} - \frac{9}{4} = \frac{51}{28}.$$

La première méthode exploite directement la loi ponctuelle; la seconde est plus courte lorsque les probabilités de dépassement ont une expression simple. La fraction est irréductible, car $51 = 3 \times 17$ et $28 = 4 \times 7$.

4°) Probabilités pour que A, B, C remportent le combat

On note $W_{A,n}$ l'événement «le combat se termine à l'épreuve n avec A comme unique survivant», et on définit de même $W_{B,n}$ et $W_{C,n}$. Pour un tireur fixé, les événements ainsi définis sont deux à deux disjoints lorsque n varie.

a) À la première épreuve, C ne peut être éliminé. L'événement $W_{A,1}$ est donc impossible.

Pour que A gagne au tour $n \geq 2$, B doit avoir été éliminé avant C : le seul duel où A puisse subsister est CA . Soit $k+1$ le premier tour d'élimination, celui de B . On a nécessairement $0 \leq k \leq n-2$: il faut au moins un tour supplémentaire pour éliminer C .

Les k premiers tours conservent ABC , les tours $k+1$ à $n-1$ conservent CA , puis le tour n laisse A seul. Réciproquement, tout chemin ainsi décrit termine le combat au tour n avec A seul. Il en résulte l'égalité d'événements :

$$W_{A,n} = \bigcup_{k=0}^{n-2} (ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \dots \cap CA_{n-1} \cap A_n).$$

Pour $k=0$, la partie correspondant aux événements ABC_j est absente. Les événements de cette réunion sont disjoints par unicité du premier tour d'élimination de B .

- b) Chaque chemin de a) a pour probabilité $a^k (2/9) c^{n-k-2} (4/9)$. En utilisant l'identité finie de I.3° c), avec $n - 1$ termes :

$$p(W_{A,n}) = \frac{8}{81} \sum_{k=0}^{n-2} a^k c^{n-2-k} = \frac{8}{81} \frac{c^{n-1} - a^{n-1}}{c - a},$$

$$p(W_{A,n}) = \frac{8}{9} \left[\left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \right], \quad n \geq 2.$$

Cette probabilité vaut aussi $(4/9)p(CA_{n-1})$: on part d'un duel non terminé au rang $n - 1$, puis A gagne au tour suivant. Pour $n = 1$, sa valeur est 0.

c) Méthode 1 — Sommation sur le tour de victoire

Par additivité dénombrable sur les événements disjoints $W_{A,n}$:

$$p(A \text{ remporte le combat}) = \sum_{n=2}^{\infty} p(W_{A,n}).$$

Les deux séries géométriques convergent absolument. Comme

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^m = q/(1 - q)$$

pour $|q| < 1$, on obtient :

$$p(A \text{ remporte le combat}) = \frac{8}{9} \left(\frac{c}{1 - c} - \frac{a}{1 - a} \right) = \frac{8}{9} \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{7}.$$

Méthode 2 — Décomposition selon la prochaine épreuve

Notons q_A la probabilité que A gagne en partant du duel CA . Après la prochaine

épreuve, A reste seul avec probabilité $4/9$, le duel se poursuit avec probabilité $2/9$, et les autres issues excluent une victoire de A . Les tirs futurs étant indépendants et de mêmes probabilités, un duel poursuivi a encore une probabilité de victoire q_A . Ainsi :

$$q_A = \frac{4}{9} + \frac{2}{9}q_A, \quad q_A = \frac{4}{7}.$$

Notons r_A la probabilité de victoire de A à partir de ABC . La première épreuve conserve ABC avec probabilité $1/9$, conduit à CA avec probabilité $2/9$, et toutes les autres issues rendent sa victoire impossible. Donc :

$$r_A = \frac{1}{9}r_A + \frac{2}{9}q_A, \quad r_A = \frac{(2/9)(4/7)}{8/9} = \frac{1}{7}.$$

La sommation fournit également la répartition du tour de victoire ; la décomposition selon la prochaine épreuve calcule plus directement la probabilité globale.

d) Méthode 1 — Sommation sur le tour de victoire

B ne peut gagner au premier tour. Pour $n \geq 2$, il gagne au tour n si le duel BC est encore en cours au rang $n - 1$, puis si B atteint C tandis que C manque B . Cette dernière probabilité est $1/3$. Donc :

$$p(W_{B,n}) = \frac{1}{3}p(BC_{n-1}) = \frac{1}{3}(b^{n-1} - a^{n-1}).$$

En sommant ces événements disjoints et en utilisant les deux séries géométriques convergentes :

$$p(B \text{ remporte le combat}) = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{1-b} - \frac{a}{1-a} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}.$$

Méthode 2 — Décomposition selon la prochaine épreuve

Notons q_B la probabilité de victoire de B à partir de BC . Le duel se poursuit avec probabilité $1/3$ et B gagne immédiatement avec probabilité $1/3$. Les autres issues excluent sa victoire. Ainsi :

$$q_B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}q_B, \quad q_B = \frac{1}{2}.$$

À partir de ABC , si r_B désigne la probabilité de victoire de B , seule la conservation de ABC ou l'entrée dans BC permet une victoire ultérieure. D'où :

$$r_B = \frac{1}{9}r_B + \frac{2}{9}q_B, \quad r_B = \frac{(2/9)(1/2)}{8/9} = \frac{1}{8}.$$

Les deux approches ont le même intérêt respectif qu'en c).

e) Méthode 1 — Sommation sur le tour de victoire

Pour tout $n \geq 1$, C peut devenir seul survivant à partir de ABC_{n-1} , BC_{n-1} ou CA_{n-1} . Ces trois états sont disjoints. Les probabilités de passage correspondantes sont $4/9$, $1/6$ et $1/9$. Ainsi :

$$p(W_{C,n}) = \frac{4}{9}a^{n-1} + \frac{1}{6}(b^{n-1} - a^{n-1}) + \frac{2}{9}(c^{n-1} - a^{n-1}),$$

$$p(W_{C,n}) = \frac{1}{18}a^{n-1} + \frac{1}{6}b^{n-1} + \frac{2}{9}c^{n-1}.$$

Les formules de I.3° pour BC_m et CA_m sont valables pour $m = 0$ puisqu'elles donnent 0. La formule précédente est donc valable aussi au premier tour et y donne $4/9$.

La réunion disjointe sur $n \geq 1$ donne, par convergence des séries géométriques :

$$p(C \text{ remporte le combat}) = \frac{1/18}{1-a} + \frac{1/6}{1-b} + \frac{2/9}{1-c} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{67}{112}.$$

Méthode 2 — Décomposition selon la prochaine épreuve

Notons $q_{C,BC}$ et $q_{C,CA}$ les probabilités de victoire de C à partir des deux duels. La probabilité de victoire immédiate vaut $1/6$ dans BC et $1/9$ dans CA . Les probabilités de poursuite valent respectivement $1/3$ et $2/9$. Par indépendance des tirs futurs :

$$q_{C,BC} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}q_{C,BC}, \quad q_{C,BC} = \frac{1}{4},$$

$$q_{C,CA} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}q_{C,CA}, \quad q_{C,CA} = \frac{1}{7}.$$

À partir de ABC , C gagne immédiatement avec probabilité $4/9$. Il peut aussi gagner après conservation de ABC ou après passage dans l'un des deux duels. Sa probabilité r_C vérifie donc :

$$r_C = \frac{4}{9} + \frac{1}{9}r_C + \frac{2}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{7},$$

$$r_C = \frac{4/9 + 1/18 + 2/63}{8/9} = \frac{67/126}{8/9} = \frac{67}{112}.$$

La première méthode donne les probabilités selon le tour de victoire ; la seconde décompose le combat en trois états où il peut se poursuivre.

Les probabilités de victoire totalisent :

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{67}{112} = \frac{97}{112}.$$

Puisque le combat se termine presque sûrement, la probabilité qu'aucun tireur ne survive vaut donc $1 - 97/112 = 15/112$. Une victoire de C et une élimination des trois tireurs sont bien des issues distinctes.

PARTIE II

Cette partie utilise les probabilités de transition des questions I.1° et I.2°, sans reprendre les probabilités globales obtenues en I.3° et I.4°. L'ordre des états est $ABC, BC, CA, A, B, C, \emptyset$.

1°) Expression de la matrice de transition M

- a) La colonne associée à un état indique les probabilités des sept états après l'épreuve suivante. Si le combat est terminé, l'état est conservé : les quatre dernières colonnes

sont celles de l'identité. Les transitions de I.2° donnent :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La somme de la première colonne vaut $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 1$. Celle de la deuxième vaut $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$. Celle de la troisième vaut $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = 1$. Chacune des quatre dernières colonnes comporte un unique coefficient égal à 1, donc sa somme vaut aussi 1.

Les sept événements associés aux états sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'événement certain. Au rang $n = 1$, certains sont encore impossibles : la victoire de A ou B et l'élimination des trois tireurs ne deviennent possibles qu'à partir du deuxième tour. On applique la formule des probabilités totales uniquement aux états de probabilité positive ; les autres contribuent par un terme nul, sans conditionner par ces événements impossibles. Cela s'applique également au rang 0, où seul ABC_0 est réalisé. Les colonnes de M décrivent dans tous les cas les probabilités d'une nouvelle épreuve commencée dans l'état indiqué, ou la conservation d'un état terminal.

Pour chaque état d'arrivée, la probabilité totale est la somme de la probabilité de chaque état de départ multipliée par celle de la transition correspondante. Cela établit, pour tout $n \geq 0$:

$$E_{n+1} = ME_n.$$

b) Initialement, les trois tireurs sont présents :

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Une récurrence donne la formule demandée. Elle est vraie pour $n = 0$ puisque $M^0 = I_7$.

Si $E_n = M^n E_0$, alors $E_{n+1} = M E_n = M^{n+1} E_0$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E_n = M^n E_0.$$

2°) Calcul des puissances de la matrice M

a) On multiplie les quatre blocs, en respectant leurs dimensions. Le bloc supérieur gauche est $U'U'' + OV'' = U'U''$. Le bloc supérieur droit est $U'O + OI_4 = O$. Le bloc inférieur gauche est $V'U'' + I_4V'' = V'U'' + V''$. Le bloc inférieur droit est $V'O + I_4I_4 = I_4$. D'où :

$$M'M'' = \begin{pmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{pmatrix}.$$

Le bloc inférieur gauche est bien de taille 4×3 ; aucune commutation des matrices n'est utilisée.

b) En lisant les trois premières colonnes et les deux groupes de lignes de M , on obtient :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Ces matrices ont les dimensions requises : U est carrée d'ordre 3 et V possède 4 lignes et

3 colonnes. On a bien $M = \begin{pmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{pmatrix}$.

c) Pour $n = 1$, la formule devient celle de b), donc l'initialisation est vérifiée. Supposons la formule vraie pour un entier $n \geq 1$. En multipliant M^n à droite par M et en utilisant a), on obtient :

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} U^{n+1} & O \\ (V + VU + \dots + VU^{n-1})U + V & I_4 \end{pmatrix}.$$

Le bloc inférieur gauche vaut $VU + VU^2 + \dots + VU^n + V$, soit $V + VU + \dots + VU^n$. La propriété est donc héréditaire. Finalement :

$$\forall n \geq 1, \quad M^n = \begin{pmatrix} U^n & O \\ \sum_{j=0}^{n-1} VU^j & I_4 \end{pmatrix}.$$

3°) Diagonalisation de la matrice U

- a) La matrice U est triangulaire. Les éléments propres des matrices triangulaires sont au programme ; ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux, qui sont distincts. En ordre croissant :

$$\lambda_1 = \frac{1}{9}, \quad \lambda_2 = \frac{2}{9}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Pour expliciter les vecteurs propres sans utiliser de déterminant, on résout $UX = \lambda X$ pour $X = {}^t(x, y, z)$. Le système est :

$$\begin{cases} (\frac{1}{9} - \lambda)x = 0, \\ \frac{2}{9}x + (\frac{1}{3} - \lambda)y = 0, \\ \frac{2}{9}x + (\frac{2}{9} - \lambda)z = 0. \end{cases}$$

Pour $\lambda = 1/9$, les deux dernières équations donnent $y = -x$ et $z = -2x$. Avec la normalisation $x = 1$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(U - \frac{1}{9}I_3) = \text{Vect}(V_1).$$

Pour $\lambda = 2/9$, la première équation impose $x = 0$, puis la deuxième impose $y = 0$. La coordonnée z est libre ; avec $z = 1$:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(U - \frac{2}{9}I_3) = \text{Vect}(V_2).$$

Pour $\lambda = 1/3$, la première équation impose $x = 0$, puis la troisième impose $z = 0$. La

coordonnée y est libre ; avec $y = 1$:

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Ker}(U - \frac{1}{3}I_3) = \text{Vect}(V_3).$$

Les trois vecteurs propres sont associés à des valeurs propres distinctes ; ils sont donc linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice U est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son inversibilité est justifiée par le caractère libre de ses colonnes. Pour calculer son inverse, écrivons :

$$P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha + \gamma \\ -2\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Le système se résout en $\alpha = x$, $\beta = z + 2x$, $\gamma = y + x$. Par conséquent :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P étant les vecteurs propres dans l'ordre croissant des valeurs propres, on a $UP = PD$, avec :

$$D = P^{-1}UP = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

4°) Calcul de la limite des puissances de la matrice M

a) Une puissance d'une matrice diagonale s'obtient en élevant chacun de ses coefficients diagonaux à cette puissance. Ainsi :

$$D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & c^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

La somme géométrique finie

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = (1 - q^n)/(1 - q)$$

est applicable à chacune des trois raisons, toutes différentes de 1. Par conséquent :

$$I_3 + D + \dots + D^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8}(1 - a^n) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7}(1 - c^n) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}(1 - b^n) \end{pmatrix}.$$

- b) Les trois raisons a, b, c sont comprises entre 0 et 1. Leurs puissances tendent donc vers 0. Au sens coefficient par coefficient fixé par l'énoncé :

$$D^n \longrightarrow 0_{3,3},$$

$$I_3 + D + \dots + D^{n-1} \longrightarrow L = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Comme $U = PDP^{-1}$, une récurrence ou les simplifications successives des facteurs $P^{-1}P$ donnent $U^n = PD^nP^{-1}$. La somme est finie, donc :

$$I_3 + U + \dots + U^{n-1} = P(I_3 + D + \dots + D^{n-1})P^{-1}.$$

Les matrices constantes P et P^{-1} ont une limite ; le résultat admis sur les produits est donc applicable. Il vient :

$$U^n \longrightarrow 0_{3,3},$$

$$I_3 + U + \dots + U^{n-1} \longrightarrow S = PLP^{-1}.$$

Pour détailler ce produit, si α, β, γ désignent trois scalaires, les matrices P et P^{-1} donnent :

$$P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \gamma - \alpha & \gamma & 0 \\ 2(\beta - \alpha) & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

En prenant $\alpha = 9/8$, $\beta = 9/7$, $\gamma = 3/2$, on obtient $\gamma - \alpha = 3/8$ et $2(\beta - \alpha) = 9/28$. Ainsi :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{9}{28} & 0 & \frac{9}{7} \end{pmatrix}.$$

Enfin, $V + VU + \dots + VU^{n-1} = V(I_3 + U + \dots + U^{n-1})$. Le résultat sur les produits donne la limite $W = VS$. Les quatre lignes du produit sont, en notant S_1, S_2, S_3 les lignes de S :

$$W_1 = \frac{4}{9}S_3 = \left(\frac{1}{7}, 0, \frac{4}{7}\right),$$

$$W_2 = \frac{1}{3}S_2 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$W_3 = \frac{4}{9}S_1 + \frac{1}{6}S_2 + \frac{1}{9}S_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{28}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{67}{112}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right),$$

$$W_4 = \frac{1}{6}S_2 + \frac{2}{9}S_3 = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{14}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}\right) = \left(\frac{15}{112}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}\right).$$

La cinquième limite demandée est donc :

$$V + VU + \dots + VU^{n-1} \longrightarrow W = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{67}{112} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ \frac{15}{112} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Tous les passages à la limite ont porté sur des coefficients et des produits de matrices de tailles fixes ; aucun échange avec une somme infinie n'a été nécessaire.

c) D'après II.2° c) et les limites de b), on obtient :

$$M^n \longrightarrow M_\infty = \begin{pmatrix} 0_{3,3} & O \\ W & I_4 \end{pmatrix},$$

$$M_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{4}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{67}{112} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{15}{112} & \frac{1}{4} & \frac{2}{7} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $E_n = M^n E_0$ et E_0 est la première colonne de l'identité, E_n est la première colonne de M^n . Ainsi :

$$E_n \longrightarrow E_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{67}{112} \\ \frac{15}{112} \end{pmatrix}.$$

d) En lisant les coordonnées de E_∞ , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(ABC_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(BC_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(CA_n) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = \frac{1}{7}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(B_n) = \frac{1}{8},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(C_n) = \frac{67}{112}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(\emptyset_n) = \frac{15}{112}.$$

Les fractions sont irréductibles : les numérateurs 67 et 15 n'ont aucun facteur commun avec $112 = 2^4 \times 7$; les deux autres fractions ont pour numérateur 1.

Pour interpréter ces limites sans faire appel aux calculs globaux de la partie I, on utilise la conservation des états terminaux. Les événements A_n sont croissants et leur réunion est l'événement « A remporte le combat ». La continuité croissante des probabilités donne donc :

$$p(A \text{ remporte le combat}) = p\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = \frac{1}{7}.$$

De même, les réunions des événements B_n et C_n sont les événements de victoire de B et de C ; leurs probabilités valent respectivement $1/8$ et $67/112$. La réunion des événements $\emptyset_n$ est l'événement « les trois tireurs sont éliminés avant ou à la fin du combat » et sa probabilité vaut $15/112$.

La somme des quatre limites vaut $1/7 + 1/8 + 67/112 + 15/112 = 1$. Les trois probabilités de victoire retrouvées sont exactement celles de I.4°.

Relevé des adaptations

- Préambule et II.1° a) : explicitation de la conservation de l'état après la fin du combat, nécessaire pour définir les événements à tout rang et pour les quatre colonnes absorbantes de la matrice. La notation $\emptyset_n$ du document désigne un état sans survivant et est conservée avec cette précision.

- I.2° b), c), d), e), f) : précision des indices des probabilités conditionnelles. Le conditionnement par ABC_n est défini dès $n = 0$; ceux par BC_n et CA_n ne le sont qu'à partir de $n = 1$. Aucune probabilité conditionnelle par un événement impossible n'est calculée.

Aucune question n'a été supprimée ni remplacée par un résultat admis supplémentaire. Le résultat sur les limites de produits matriciels est conservé tel qu'il est admis dans l'énoncé. Aucune figure utile ni aucun code informatique ne figure dans le sujet source.