



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1999

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'objectif de ce problème est l'étude de la modélisation de l'accroissement d'une population, tant par les naissances que par l'immigration. Cette étude est effectuée dans la partie II, tandis que, dans la partie I, on établit des résultats préliminaires relatifs à la série géométrique et à ses applications en probabilités.

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. On utilise la notation $\binom{a}{b}$ pour les coefficients binomiaux. Une somme vide vaut 0 et la puissance x^0 vaut 1, y compris lorsque $x = 0$.

Partie I

1°) Étude des séries dérivées de la série géométrique.

Dans toute cette question, on désigne par x un nombre réel tel que $0 \leq x < 1$.

a) Calculer pour tout nombre entier naturel n les deux sommes suivantes :

$$\sum_{j=0}^n x^j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n jx^{j-1}.$$

b) Déterminer la limite de x^n , de nx^n et des deux sommes précédentes quand n tend vers $+\infty$.

On admet le résultat suivant, propre à la série géométrique : pour tout entier $k \geq 1$ et tout $x \in [0, 1[$, la série ci-dessous converge et vérifie la relation (R) :

$$\sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k} = \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

c) Exprimer ainsi $\frac{1}{(1-x)^3}$ sous la forme de la somme d'une série.

d) Expliciter la dérivée k -ième de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Effectuer dans la relation (R) le changement d'indice $n = m - k$ et déduire de ces résultats l'expression de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n$$

en fonction de k et x .

2°) Application à l'étude de la loi binomiale négative.

On considère dans cette question une suite d'épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes et menant au succès avec la probabilité p , où $0 < p < 1$.

Pour tout entier $k \geq 1$, on désigne par X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de l'épreuve où intervient le k -ième succès. Elle prend donc des valeurs supérieures ou égales à k .

- a)** On suppose $k = 1$. Préciser la loi de X_1 , la probabilité $P(X_1 = n + 1)$ pour tout entier naturel n et l'espérance $E(X_1)$ de la variable aléatoire X_1 .
- b)** On suppose $k > 1$. Déterminer la probabilité d'obtenir $k - 1$ succès en $n + k - 1$ épreuves, puis en déduire la probabilité $P(X_k = n + k)$ pour tout entier naturel n .
- c)** À l'aide des résultats précédents, vérifier que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_k = n + k)$$

a pour somme 1, puis calculer l'espérance $E(X_k)$ en fonction de p et k .

Comment peut-on interpréter ce dernier résultat ?

On dit alors que la variable aléatoire X_k suit la loi binomiale négative de paramètres p et k .

Partie II

On étudie dans cette partie la croissance d'une population au cours du temps. À cet effet, on introduit pour tout réel $t \geq 0$ la variable aléatoire $X(t)$ indiquant le nombre d'individus de la population à l'instant t . On suppose $X(0) = k$, où $k \in \mathbb{N}$: la population compte donc k individus à l'instant initial.

Dans les hypothèses qui suivent, les probabilités conditionnelles sachant $X(t) = n + k$ sont considérées lorsque $P(X(t) = n + k) > 0$. Dans une formule de probabilités totales, un état de probabilité nulle ne contribue pas à la somme.

1°) Croissance de la population par les naissances, avec $k > 0$.

On suppose qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tous $t \geq 0$, $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$P(X(t+h) < n+k \mid X(t) = n+k) = 0,$$

$$P(X(t+h) = n+k+1 \mid X(t) = n+k) = \lambda(n+k)h + h\varepsilon'_n(h),$$

$$P(X(t+h) > n+k+1 \mid X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h),$$

où ε'_n et ε''_n sont deux fonctions de h , indépendantes de t , qui tendent vers 0 lorsque $h \rightarrow 0^+$.

La notation $P(A \mid X(t) = n+k)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement $X(t) = n+k$.

Ces hypothèses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité d'une naissance pendant une courte durée h est proportionnelle à cette durée et au nombre d'individus présents, et que la probabilité de plusieurs naissances est négligeable devant celle d'une seule naissance.

Préciser dans ce contexte la probabilité $P(X(t+h) = n+k \mid X(t) = n+k)$.

a) Établir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant :

$$P(X(t+h) = k) = (1 - \lambda kh)P(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h),$$

où, pour t fixé, $\varepsilon_0(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0^+$.

En déduire que la fonction $p_k(t) = P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée à droite en t est :

$$p'_{k,+}(t) = -\lambda k p_k(t).$$

On admet que p_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que cette formule y est valable pour sa dérivée usuelle.

b) Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $t \mapsto e^{\lambda k t} p_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $p_k(0) = P(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $p_k(t)$ en fonction de k , λ et t .

c) Établir le résultat suivant pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = n+k) &= (1 - \lambda(n+k)h)P(X(t) = n+k) \\ &+ \lambda(n+k-1)hP(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h), \end{aligned}$$

où, pour t fixé, $\varepsilon_n(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0^+$.

En déduire que $p_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $k \geq 1$:

$$p'_{n+k,+}(t) = -\lambda(n+k)p_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1)p_{n+k-1}(t).$$

On admet que p_{n+k} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que cette formule y est valable pour sa dérivée usuelle.

d) Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $t \mapsto e^{\lambda(n+k)t} p_{n+k}(t)$ et en déduire par

réurrence sur n :

$$p_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k) = \binom{n+k-1}{k-1} e^{-\lambda kt} (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

- e) Reconnaître, à l'aide des résultats de la partie I, la loi de $X(t)$ et déterminer son espérance $E(X(t))$ en fonction de λ , k et t .

2°) Croissance de la population par l'immigration.

On suppose qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que, pour tous $t \geq 0$, $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$P(X(t+h) < n+k \mid X(t) = n+k) = 0,$$

$$P(X(t+h) = n+k+1 \mid X(t) = n+k) = \mu h + h\varepsilon'_n(h),$$

$$P(X(t+h) > n+k+1 \mid X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h),$$

où ε'_n et ε''_n sont deux fonctions de h , indépendantes de t , qui tendent vers 0 lorsque $h \rightarrow 0^+$.

Ces hypothèses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité d'arrivée d'un immigré pendant une courte durée h est proportionnelle à cette durée, mais indépendante du nombre d'individus déjà présents, et que la probabilité d'arrivée de plusieurs immigrés est négligeable devant celle d'un seul immigré.

Préciser dans ce contexte la probabilité $P(X(t+h) = n+k \mid X(t) = n+k)$.

- a) Établir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant :

$$P(X(t+h) = k) = (1 - \mu h)P(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h),$$

où, pour t fixé, $\varepsilon_0(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0^+$.

En déduire que $q_k(t) = P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée à droite en t est :

$$q'_{k,+}(t) = -\mu q_k(t).$$

On admet que q_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que cette formule y est valable pour sa dérivée usuelle.

b) Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $t \mapsto e^{\mu t} q_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $q_k(0) = P(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $q_k(t)$ en fonction de μ et t .

c) Établir le résultat suivant pour $n \geq 1$:

$$P(X(t+h) = n+k) = (1-\mu h)P(X(t) = n+k) + \mu h P(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h),$$

où, pour t fixé, $\varepsilon_n(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0^+$.

En déduire que $q_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $k \geq 0$:

$$q'_{n+k,+}(t) = -\mu q_{n+k}(t) + \mu q_{n+k-1}(t).$$

On admet que q_{n+k} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que cette formule y est valable pour sa dérivée usuelle.

d) Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $t \mapsto e^{\mu t} q_{n+k}(t)$ et en déduire $q_{n+k}(t)$ pour $n = 1, n = 2$ et $n = 3$, puis dans le cas général.

e) Reconnaître la loi de $X(t) - k$ et donner l'espérance $E(X(t))$ en fonction de μ, k et t .