



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1999

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1°) Étude des séries dérivées de la série géométrique.

a) Calcul des deux sommes finies.

Méthode 1 — Somme géométrique et dérivation d'une somme finie.

Posons

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^n x^j$$

et

$$T_n(x) = \sum_{j=1}^n jx^{j-1}.$$

Comme $x \neq 1$, la formule de la somme géométrique donne :

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Pour $n \geq 1$, S_n est un polynôme ; sa dérivée est donc la somme finie des dérivées de ses termes. Aucun échange avec une série infinie n'intervient. Ainsi :

$$T_n(x) = S'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Pour $n = 0$, $T_0 = 0$ et la même formule donne bien 0. Pour $x = 0$, on a $S_n(0) = 1$, $T_0(0) = 0$ et $T_n(0) = 1$ si $n \geq 1$.

Méthode 2 — Décalage et soustraction de sommes finies.

Les termes communs de $S_n - xS_n$ se compensent :

$$(1 - x)S_n = 1 - x^{n+1}.$$

Pour $n \geq 1$, écrivons ensuite :

$$T_n = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}, \quad xT_n = x + 2x^2 + \dots + nx^n.$$

La soustraction donne :

$$(1 - x)T_n = 1 + x + \dots + x^{n-1} - nx^n = \frac{1 - x^n}{1 - x} - nx^n.$$

En divisant par $1 - x$, qui est strictement positif, on obtient :

$$T_n = \frac{1 - x^n - nx^n(1 - x)}{(1 - x)^2} = \frac{1 - (n + 1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}.$$

Le cas $n = 0$ se traite directement par la convention sur les sommes vides. Les deux méthodes donnent donc les mêmes formules ; la première utilise le calcul différentiel, la seconde fournit un raisonnement purement algébrique.

b) Limites et relation admise.

Si $x = 0$, alors $x^n = 0$ et $nx^n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Si $0 < x < 1$, posons $a = -\ln x > 0$.

On a $x^n = e^{-an}$ et $nx^n = ne^{-an}$. Les croissances comparées entre exponentielle et puissance donnent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n = 0.$$

Il en résulte aussi $(n + 1)x^n \rightarrow 0$ et $nx^{n+1} \rightarrow 0$. Les formules de a), dont les

dénominateurs sont des constantes strictement positives pour x fixé, donnent :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{j=1}^{+\infty} jx^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ces égalités restent valables en $x = 0$, où les sommes valent toutes deux 1.

Question adaptée au programme actuel : l'admission originale autorisant la dérivation terme à terme est remplacée par son seul résultat particulier nécessaire, la relation (R) pour la série géométrique.

Résultat admis dans cette version adaptée : pour tout entier $k \geq 1$ et tout $x \in [0, 1[$, la série converge et :

$$\sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1) \cdots (m-k+1)x^{m-k} = \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right).$$

Cette relation sera utilisée en c) avec $k = 2$, puis en d) avec un entier k quelconque. Elle ne constitue pas une autorisation générale de dériver des séries.

c) Série représentant la puissance troisième.

La fonction $f(x) = (1-x)^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$. Ses deux premières dérivées sont :

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

La relation (R) avec $k = 2$ donne :

$$\sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1)x^{m-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

En divisant par 2 puis en posant $n = m - 2$, on obtient les deux écritures :

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+2}{2} x^n.$$

La convergence est garantie par le résultat admis. Pour $x = 0$, seul le terme d'exposant nul subsiste et la somme vaut bien 1.

d) Dérivée d'ordre quelconque et série binomiale.

Pour tout entier $k \geq 0$ et tout $x < 1$, démontrons par récurrence :

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Pour $k = 0$, c'est la définition de f . Si la formule est vraie au rang k , la règle de dérivation d'une puissance composée donne :

$$f^{(k+1)}(x) = k!(k+1)(1-x)^{-k-2} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}.$$

La récurrence est donc établie. Pour $k \geq 1$, la relation (R) et le changement d'indice demandé donnent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

En effet, pour $m = n + k$, le produit des k entiers $m, m-1, \dots, m-k+1$ vaut $(n+k)!/n!$. Comme $k! > 0$, on peut diviser par $k!$ et reconnaître les coefficients binomiaux :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Cette dernière identité vaut également pour $k = 0$, par la série géométrique établie en b). Il s'agit d'un décalage d'indice d'une série déjà convergente, sans réarrangement de ses termes.

2°) Application à l'étude de la loi binomiale négative.

a) Cas du premier succès.

L'événement $\{X_1 = n + 1\}$ signifie que les n premières épreuves échouent et que la suivante réussit. Par indépendance des épreuves :

$$P(X_1 = n + 1) = (1 - p)^n p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi X_1 suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$. Comme $0 < p < 1$, cette loi admet une espérance finie et :

$$E(X_1) = \frac{1}{p}.$$

On peut aussi vérifier directement l'existence et la valeur de l'espérance à partir de I.1.b). En posant $r = 1 - p \in]0, 1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1) P(X_1 = n + 1) = p \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1) r^n = \frac{p}{(1 - r)^2} = \frac{1}{p}.$$

La série de valeurs absolues est identique à cette série positive et converge ; l'espérance est donc bien définie.

b) Loi du numéro du k -ième succès.

Soit $k > 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de succès lors des $n + k - 1$ premières épreuves suit la loi binomiale de paramètres $n + k - 1$ et p , puisque les épreuves sont indépendantes et de même probabilité de succès. La probabilité d'obtenir exactement $k - 1$ succès est donc :

$$\binom{n + k - 1}{k - 1} p^{k-1} (1 - p)^n.$$

L'événement $\{X_k = n + k\}$ exige ces $k - 1$ succès, puis un succès à l'épreuve $n + k$. Cette dernière épreuve est indépendante des précédentes. Par conséquent :

$$P(X_k = n + k) = \binom{n + k - 1}{k - 1} p^k (1 - p)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pour un entier inférieur à k , la probabilité est nulle. La formule est aussi valable pour $k = 1$, où elle redonne le résultat de a).

c) Normalisation, espérance et interprétation.

Posons $r = 1 - p \in]0, 1[$. En appliquant I.1.d) avec le paramètre entier $k - 1 \geq 0$, la série des probabilités converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_k = n + k) = p^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k-1} r^n = \frac{p^k}{(1-r)^k} = 1.$$

Les événements $\{X_k = n + k\}$ sont disjoints. Cette somme égale à 1 montre, en particulier, que le k -ième succès survient presque sûrement ; aucune masse de probabilité ne demeure sur une attente infinie.

Méthode 1 — Calcul de l'espérance à partir de la loi.

Pour tout $n \geq 0$, les définitions factorielles donnent :

$$(n+k) \binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k)!}{(k-1)!n!} = k \binom{n+k}{k}.$$

La série positive définissant l'espérance absolue est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+k) P(X_k = n+k) = kp^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} r^n = \frac{kp^k}{(1-r)^{k+1}} = \frac{k}{p}.$$

Elle converge par I.1.d). Ainsi X_k est intégrable et :

$$E(X_k) = \frac{k}{p}.$$

Méthode 2 — Décomposition en temps d'attente successifs.

Posons $X_0 = 0$ et, pour $1 \leq j \leq k$, $G_j = X_j - X_{j-1}$. Ces variables sont presque sûrement finies, par la normalisation déjà démontrée pour chaque rang de succès.

Pour des entiers $g_1, \dots, g_k \geq 1$, l'événement $\{G_1 = g_1, \dots, G_k = g_k\}$ fixe une succession de blocs : $g_j - 1$ échecs suivis d'un succès pour chaque j . Tous les résultats concernés portent sur des épreuves distinctes. L'indépendance des épreuves donne :

$$P(G_1 = g_1, \dots, G_k = g_k) = p^k r^{g_1 + \dots + g_k - k} = \prod_{j=1}^k (pr^{g_j - 1}).$$

La fonction $g \mapsto pr^{g-1}$ est une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, car sa somme vaut $p/(1-r) = 1$. En sommant successivement sur les autres indices, on obtient $P(G_j = g) = pr^{g-1}$; chaque sommation utilise simplement une série géométrique positive de somme 1. La factorisation de la loi conjointe établit aussi l'indépendance de $G_1, \dots, G_k$.

Chaque G_j est donc intégrable et $E(G_j) = 1/p$. Comme $X_k = G_1 + \dots + G_k$, la linéarité de l'espérance pour cette somme finie donne :

$$E(X_k) = \sum_{j=1}^k E(G_j) = \frac{k}{p}.$$

Le numéro du k -ième succès est la durée totale d'attente de k succès, chaque attente ayant une durée moyenne $1/p$. La première méthode calcule le moment à partir des probabilités ponctuelles ; la seconde explique le résultat par la structure de l'expérience.

Partie II

Préliminaires communs aux deux modèles.

Les deux questions étudient deux modèles distincts. Les notations p_j concernent le modèle des naissances et les notations q_j celui de l'immigration.

Puisque $X(0) = k$ sûrement, les hypothèses de non-diminution appliquées à $t = 0$ et $h = s > 0$ donnent $P(X(s) < k) = 0$. Ainsi, à chaque instant, $X(s)$ prend presque sûrement ses valeurs dans $k + \mathbb{N}$. À $s = 0$, cette propriété découle directement de la condition initiale.

Les événements $\{X(t) = k + j\}$, pour $j \in \mathbb{N}$, forment donc un système complet d'événements à un événement négligeable près. Dans les probabilités totales ci-dessous, on ne considère les probabilités conditionnelles que pour les états de probabilité strictement positive ; tous les autres termes sont nuls.

Question adaptée au programme actuel : cette convention rend les hypothèses applicables dès $t = 0$, où tous les états autres que k ont une probabilité nulle. Le nombre initial k est explicitement un entier naturel.

1°) Croissance de la population par les naissances.

Probabilité de rester au même état.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et un état $X(t) = n + k$ de probabilité positive. Les quatre possibilités pour la valeur de $X(t + h)$ sont : être inférieure à $n + k$, égale à $n + k$, égale à $n + k + 1$ ou supérieure à $n + k + 1$. Elles sont disjointes et leur réunion est l'univers. La première a une probabilité conditionnelle nulle. On en déduit :

$$P(X(t + h) = n + k \mid X(t) = n + k) = 1 - \lambda(n + k)h - h(\varepsilon'_n(h) + \varepsilon''_n(h)).$$

En posant $\eta_n(h) = -\varepsilon'_n(h) - \varepsilon''_n(h)$, on a $\eta_n(h) \rightarrow 0$ et :

$$P(X(t + h) = n + k \mid X(t) = n + k) = 1 - \lambda(n + k)h + h\eta_n(h).$$

Cette expression correspond à une probabilité dans le modèle donné ; son terme principal $1 - \lambda(n + k)h$ est une approximation pour h petit, et ne remplace pas la probabilité exacte pour un h quelconque.

a) Équation pour la probabilité de l'état initial.

Pour $t \geq 0$, posons $p_k(t) = P(X(t) = k)$. Si $X(t) = k + j$ avec $j \geq 1$, la non-diminution interdit $X(t + h) = k$. La formule des probabilités totales ne laisse donc que l'état k :

$$p_k(t + h) = (1 - \lambda kh + h\eta_0(h))p_k(t).$$

Pour t fixé, posons $\varepsilon_{0,t}(h) = \eta_0(h)p_k(t)$. Comme $0 \leq p_k(t) \leq 1$ et $\eta_0(h) \rightarrow 0$, on a $\varepsilon_{0,t}(h) \rightarrow 0$. Par conséquent :

$$p_k(t + h) = (1 - \lambda kh)p_k(t) + h\varepsilon_{0,t}(h).$$

Après soustraction de $p_k(t)$ et division par $h > 0$:

$$\frac{p_k(t + h) - p_k(t)}{h} = -\lambda kp_k(t) + \varepsilon_{0,t}(h).$$

En faisant tendre h vers 0^+ , on obtient l'existence de la dérivée à droite et :

$$p'_{k,+}(t) = -\lambda kp_k(t).$$

Question adaptée au programme actuel : le reste est compris à t fixé ; il peut dépendre de t . L'indépendance en t des restes des probabilités conditionnelles ne se transmet pas nécessairement au reste de la probabilité totale.

Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans le sujet original : p_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $p'_k(t) = -\lambda kp_k(t)$. Cette admission autorise le calcul différentiel de b). En 0, on utilise la dérivée à droite précédemment établie.

b) Détermination de p_k .

La méthode demandée consiste à multiplier par une exponentielle. Sur $]0, +\infty[$, la règle de dérivation d'un produit et a) donnent :

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda kt}p_k(t)) = e^{\lambda kt}(\lambda kp_k(t) + p'_k(t)) = 0.$$

La fonction $t \mapsto e^{\lambda kt} p_k(t)$ est donc constante sur $]0, +\infty[$, par le théorème des accroissements finis. La dérivabilité à droite en 0 entraîne la continuité à droite en 0. Comme $p_k(0) = 1$, cette constante est 1.

Ainsi, pour tout $t \geq 0$:

$$p_k(t) = e^{-\lambda kt}.$$

On vérifie la condition initiale et l'équation : $p_k(0) = 1$ et $p'_k = -\lambda k p_k$.

c) Équation pour les états suivants.

Fixons $n \geq 1$ et $t \geq 0$. Dans les probabilités totales pour $\{X(t+h) = n+k\}$, tout état supérieur à $n+k$ donne une contribution nulle. Il ne reste donc que la somme finie des états $k, k+1, \dots, k+n$.

La contribution de l'état $n+k$ est :

$$(1 - \lambda(n+k)h + h\eta_n(h))p_{n+k}(t).$$

La contribution de l'état $n+k-1$ est :

$$(\lambda(n+k-1)h + h\varepsilon'_{n-1}(h))p_{n+k-1}(t).$$

Enfin, si $0 \leq j \leq n-2$, atteindre $n+k$ depuis $k+j$ exige au moins deux naissances.

Notons $R_{j,n,t}(h)$ la contribution correspondante dans les probabilités totales.

L'hypothèse sur les naissances multiples donne :

$$0 \leq R_{j,n,t}(h) \leq h\varepsilon''_j(h)p_{k+j}(t).$$

Si l'état $k+j$ a une probabilité nulle, on pose simplement $R_{j,n,t}(h) = 0$. Pour un état de probabilité positive, $\varepsilon''_j(h)$ est non négatif, car $h\varepsilon''_j(h)$ est une probabilité. Comme n est fixé et que les restes tendent vers 0, il en résulte :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{n-2} R_{j,n,t}(h) = 0.$$

Pour $n = 1$, cette somme est vide et vaut 0. On peut donc réunir tous les restes dans :

$$\varepsilon_{n,t}(h) = \eta_n(h)p_{n+k}(t) + \varepsilon'_{n-1}(h)p_{n+k-1}(t) + \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{n-2} R_{j,n,t}(h),$$

qui tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0^+$. Ainsi :

$$p_{n+k}(t+h) = (1 - \lambda(n+k)h)p_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1)hp_{n+k-1}(t) + h\varepsilon_{n,t}(h).$$

Le quotient des accroissements donne alors :

$$\frac{p_{n+k}(t+h) - p_{n+k}(t)}{h} = -\lambda(n+k)p_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1)p_{n+k-1}(t) + \varepsilon_{n,t}(h).$$

Par passage à la limite à droite :

$$p'_{n+k,+}(t) = -\lambda(n+k)p_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1)p_{n+k-1}(t).$$

Question adaptée au programme actuel : le reste s'entend à t fixé, comme en a).

Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans le sujet original : p_{n+k} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et cette dernière égalité y vaut pour sa dérivée usuelle. La question d) utilise précisément cette égalité.

d) Calcul des probabilités par récurrence.

Méthode 1 — Facteur exponentiel et intégration.

Pour $n \geq 1$, posons $F_n(t) = e^{\lambda(n+k)t}p_{n+k}(t)$. Sur $]0, +\infty[$, c) donne :

$$F'_n(t) = \lambda(n+k-1)e^{\lambda(n+k)t}p_{n+k-1}(t).$$

La condition initiale est $p_{n+k}(0) = 0$ pour $n \geq 1$, puisque $X(0) = k$ sûrement. Pour $n = 0$, b) établit la formule :

$$p_k(t) = \binom{k-1}{k-1} e^{-\lambda kt} (1 - e^{-\lambda t})^0 = e^{-\lambda kt}.$$

Supposons maintenant que, pour un entier $n \geq 1$, la formule soit établie au rang $n-1$:

$$p_{n+k-1}(t) = \binom{n+k-2}{k-1} e^{-\lambda kt} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

En la substituant dans F'_n , on obtient :

$$F'_n(t) = \lambda(n+k-1) \binom{n+k-2}{k-1} e^{\lambda nt} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

L'identité factorielle

$$(n+k-1) \binom{n+k-2}{k-1} = n \binom{n+k-1}{k-1}$$

est valable aussi pour $k = 1$. De plus :

$$e^{\lambda nt} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} = e^{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^{n-1}.$$

Ainsi :

$$F'_n(t) = \binom{n+k-1}{k-1} \lambda n e^{\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^{n-1} = \frac{d}{dt} \left[\binom{n+k-1}{k-1} (e^{\lambda t} - 1)^n \right].$$

Les deux fonctions sont continues à droite en 0 : pour F_n , cela découle de la dérivabilité à droite de p_{n+k} . Elles y valent toutes deux 0. Leur différence a une dérivée nulle sur $]0, +\infty[$; elle est donc identiquement nulle. C'est également l'intégration de l'égalité des dérivées avec la condition initiale. Par conséquent :

$$F_n(t) = \binom{n+k-1}{k-1} (e^{\lambda t} - 1)^n.$$

En multipliant par $e^{-\lambda(n+k)t}$, on conclut :

$$p_{n+k}(t) = \binom{n+k-1}{k-1} e^{-\lambda kt} (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

La récurrence est établie pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$. En particulier, à $t = 0$, la formule vaut 1 pour $n = 0$ et 0 pour $n \geq 1$.

Méthode 2 — Vérification d'une solution et unicité élémentaire.

Cette méthode permet de contrôler une formule proposée sans calculer une primitive.

Posons $A_n = \binom{n+k-1}{k-1}$ et $u_n(t) = A_n e^{-\lambda kt} (1 - e^{-\lambda t})^n$. Pour $n \geq 1$, la règle du produit donne :

$$u'_n(t) = -\lambda k u_n(t) + \lambda n A_n e^{-\lambda(k+1)t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}.$$

Comme $e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t})$, le second terme peut être écrit :

$$\lambda n A_n e^{-\lambda kt} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} - \lambda n u_n(t).$$

L'identité $n A_n = (n + k - 1) A_{n-1}$ montre donc :

$$u'_n(t) = -\lambda(n + k) u_n(t) + \lambda(n + k - 1) u_{n-1}(t).$$

On a $u_0 = p_k$ par b), et $u_n(0) = p_{n+k}(0) = 0$ pour $n \geq 1$. Si $u_{n-1} = p_{n+k-1}$, la différence $v_n = p_{n+k} - u_n$ vérifie :

$$v'_n = -\lambda(n + k) v_n, \quad v_n(0) = 0.$$

La dérivée de $e^{\lambda(n+k)t} v_n(t)$ est nulle. Sa continuité à droite en 0 et sa valeur initiale nulle imposent $v_n = 0$. Une récurrence donne donc $p_{n+k} = u_n$ pour tout n .

La première méthode construit la formule à partir des équations ; la seconde vérifie la formule et démontre qu'aucune autre solution avec les mêmes conditions initiales ne peut intervenir. Aucune division par $1 - e^{-\lambda t}$ n'est nécessaire, ce qui préserve le cas $t = 0$.

e) Loi et espérance dans le modèle des naissances.

Pour $t > 0$, posons $p = e^{-\lambda t}$. Comme $\lambda > 0$, on a $0 < p < 1$. La formule de d) devient :

$$P(X(t) = n + k) = \binom{n+k-1}{k-1} p^k (1-p)^n.$$

On reconnaît exactement la loi binomiale négative de paramètres p et k définie dans la partie I, portée par $k + \mathbb{N}$. Sa normalisation et son intégrabilité ont été établies en I.2.c). Ainsi :

$$E(X(t)) = \frac{k}{p} = ke^{\lambda t}.$$

Pour $t = 0$, le paramètre serait $p = 1$, qui n'appartient pas à l'intervalle utilisé dans I.2. On traite donc séparément cet instant : $X(0) = k$ sûrement, sa loi est la loi certaine en k et son espérance vaut k . La formule $E(X(t)) = ke^{\lambda t}$ reste donc valable pour tout $t \geq 0$.

Le nombre moyen d'individus croît exponentiellement dans ce modèle.

2°) Croissance de la population par l'immigration.

Probabilité de rester au même état.

Pour un état $X(t) = n + k$ de probabilité positive, on utilise le même partage en quatre événements que dans II.1. La probabilité de diminution est nulle, celle d'une arrivée est $\mu h + h\varepsilon'_n(h)$ et celle de plusieurs arrivées est $h\varepsilon''_n(h)$. Ainsi :

$$P(X(t+h) = n+k \mid X(t) = n+k) = 1 - \mu h - h(\varepsilon'_n(h) + \varepsilon''_n(h)).$$

En posant $\eta_n(h) = -\varepsilon'_n(h) - \varepsilon''_n(h)$, qui tend vers 0, cette probabilité s'écrit $1 - \mu h + h\eta_n(h)$. Les fonctions de reste concernent ici le modèle d'immigration et sont distinctes de celles du modèle des naissances.

a) Équation pour l'état initial.

Posons $q_k(t) = P(X(t) = k)$. Tout état $k + j$ avec $j \geq 1$ ne peut conduire à k , d'après la non-diminution. Les probabilités totales donnent donc :

$$q_k(t+h) = (1 - \mu h + h\eta_0(h))q_k(t).$$

Pour t fixé, définissons $\varepsilon_{0,t}(h) = \eta_0(h)q_k(t)$. Comme $q_k(t) \in [0, 1]$, ce reste tend vers 0. On obtient l'égalité demandée :

$$q_k(t+h) = (1-\mu h)q_k(t) + h\varepsilon_{0,t}(h).$$

Ainsi :

$$\frac{q_k(t+h) - q_k(t)}{h} = -\mu q_k(t) + \varepsilon_{0,t}(h) \longrightarrow -\mu q_k(t).$$

Par conséquent, q_k est dérivable à droite et $q'_{k,+}(t) = -\mu q_k(t)$, y compris lorsque $k = 0$.

Question adaptée au programme actuel : le reste est considéré à t fixé.

Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans le sujet original : q_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $q'_k(t) = -\mu q_k(t)$. Ce résultat permet le calcul de b).

b) Détermination de q_k .

Sur $]0, +\infty[$, la dérivée du produit demandé est :

$$\frac{d}{dt}(e^{\mu t} q_k(t)) = e^{\mu t} (\mu q_k(t) + q'_k(t)) = 0.$$

Le produit est constant sur $]0, +\infty[$. La dérivabilité à droite de q_k en 0 assure sa continuité à droite. Comme $q_k(0) = 1$, la constante vaut 1. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$:

$$q_k(t) = e^{-\mu t}.$$

Cette probabilité est celle d'aucune immigration avant l'instant t ; elle ne dépend pas de la population initiale k .

c) Équation pour les états suivants.

Fixons $n \geq 1$ et $t \geq 0$. La non-diminution élimine les états strictement supérieurs à $n+k$ dans les probabilités totales. Les contributions des états $n+k$ et $n+k-1$ sont respectivement :

$$(1 - \mu h + h\eta_n(h))q_{n+k}(t),$$

$$(\mu h + h\varepsilon'_{n-1}(h))q_{n+k-1}(t).$$

Pour $0 \leq j \leq n-2$, atteindre $n+k$ à partir de $k+j$ exige plusieurs immigrations. En notant $R_{j,n,t}(h)$ la contribution de cet état, on a :

$$0 \leq R_{j,n,t}(h) \leq h\varepsilon_j''(h)q_{k+j}(t).$$

Un état de probabilité nulle a une contribution nulle. Pour les autres, la borne est une probabilité non négative. La somme comporte un nombre fini de termes ; pour $n = 1$, elle est vide. On a donc :

$$\frac{1}{h} \sum_{j=0}^{n-2} R_{j,n,t}(h) \longrightarrow 0.$$

Définissons alors :

$$\varepsilon_{n,t}(h) = \eta_n(h)q_{n+k}(t) + \varepsilon'_{n-1}(h)q_{n+k-1}(t) + \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{n-2} R_{j,n,t}(h).$$

Ce reste tend vers 0. L'égalité des probabilités totales devient :

$$q_{n+k}(t+h) = (1 - \mu h)q_{n+k}(t) + \mu h q_{n+k-1}(t) + h\varepsilon_{n,t}(h).$$

En divisant l'accroissement par h puis en passant à la limite à droite :

$$q'_{n+k,+}(t) = -\mu q_{n+k}(t) + \mu q_{n+k-1}(t).$$

Cette démonstration est valable pour tout entier $k \geq 0$: aucun coefficient ni aucun raisonnement n'exige $k \geq 1$.

Question adaptée au programme actuel : la restriction $k \geq 1$ imprimée dans cette question est rectifiée en $k \geq 0$, en cohérence avec le préambule de la partie II et avec le modèle d'immigration. Le reste est considéré à t fixé.

Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans le sujet original : q_{n+k} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et l'égalité précédente y vaut pour sa dérivée usuelle. Elle sera utilisée en d).

d) Probabilités pour une, deux, trois immigrations et cas général.

Pour $n \geq 0$, posons $F_n(t) = e^{\mu t} q_{n+k}(t)$. La question b) donne $F_0(t) = 1$. Pour $n \geq 1$, c) entraîne :

$$F'_n(t) = e^{\mu t} (\mu q_{n+k}(t) + q'_{n+k}(t)) = \mu e^{\mu t} q_{n+k-1}(t) = \mu F_{n-1}(t).$$

La condition $X(0) = k$ implique $F_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$. La continuité à droite en 0 découle de la dérivabilité à droite des probabilités.

Pour $n = 1$, $F'_1(t) = \mu F_0(t) = \mu$, donc $F_1(t) = \mu t$ et :

$$q_{k+1}(t) = e^{-\mu t} \mu t.$$

Pour $n = 2$, $F'_2(t) = \mu F_1(t) = \mu^2 t$, donc, avec $F_2(0) = 0$, $F_2(t) = \mu^2 t^2 / 2$ et :

$$q_{k+2}(t) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^2}{2}.$$

Pour $n = 3$, $F'_3(t) = \mu F_2(t) = \mu^3 t^2 / 2$, donc $F_3(t) = \mu^3 t^3 / 6$ et :

$$q_{k+3}(t) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^3}{6}.$$

Pour le cas général, démontrons par récurrence $F_n(t) = (\mu t)^n / n!$. C'est vrai pour $n = 0$. Si la formule est établie au rang $n - 1$, alors :

$$F'_n(t) = \mu \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Une primitive est $\mu^n t^n / n!$, car $n! = n(n-1)!$. La condition $F_n(0) = 0$ fixe la constante d'intégration à 0. Rigoureusement, la différence entre F_n et cette primitive a une dérivée nulle sur $]0, +\infty[$ et tend vers 0 en 0, donc elle est nulle.

On conclut, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$:

$$q_{n+k}(t) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!}.$$

En $t = 0$, cette expression vaut 1 pour $n = 0$ et 0 pour $n \geq 1$, conformément à la condition initiale.

e) Loi et espérance dans le modèle d'immigration.

Pour $t > 0$, la variable $Y(t) = X(t) - k$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et :

$$P(Y(t) = n) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!}.$$

Il s'agit de la loi de Poisson de paramètre $\mu t > 0$. La série exponentielle vérifie directement la normalisation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y(t) = n) = e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} = e^{-\mu t} e^{\mu t} = 1.$$

Méthode 1 — Espérance de la loi usuelle et translation.

Une variable de loi de Poisson de paramètre μt est intégrable et son espérance vaut μt . Comme $X(t) = k + Y(t)$, la linéarité de l'espérance donne :

$$E(X(t)) = k + \mu t.$$

Méthode 2 — Calcul direct du premier moment.

Les termes de la série du premier moment de $Y(t)$ sont non négatifs. Pour $t > 0$, en décalant l'indice $m = n - 1$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n P(Y(t) = n) = e^{-\mu t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mu t)^n}{(n-1)!} = \mu t e^{-\mu t} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\mu t)^m}{m!} = \mu t.$$

La série converge par la série exponentielle ; elle prouve donc aussi l'existence de l'espérance absolue. La série du premier moment de $X(t)$ peut ensuite être calculée en ajoutant k fois la série des probabilités, déjà de somme 1, et donne $k + \mu t$.

La première méthode utilise la reconnaissance de la loi ; la seconde vérifie explicitement le moment à partir de ses probabilités.

Pour $t = 0$, on a $Y(0) = 0$ et $X(0) = k$ sûrement. La loi de $Y(0)$ est certaine en 0 ; son espérance vaut 0, et celle de $X(0)$ vaut k . Ainsi, pour tous $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$E(X(t)) = k + \mu t.$$

La population moyenne croît linéairement dans ce modèle, alors qu'elle croît exponentiellement dans le modèle des naissances.

Relevé des adaptations

- I.1.a) : ajout explicite des conventions sur la somme vide et la puissance d'exposant nul, pour traiter $n = 0$ et $x = 0$ sans ambiguïté ; remplacement de la lettre muette de sommation par j pour la distinguer du paramètre k utilisé ensuite.
- I.1.b), admission suivant la question : remplacement de l'autorisation de dériver une série terme à terme par l'admission de la seule relation particulière (R) , avec convergence précisée. Les questions c) et d) et leurs objectifs sont conservés.
- II.1 et II.2, préambules et probabilités totales des questions a) et c) : précision que k est entier et que les probabilités conditionnelles ne sont définies que pour un événement conditionnant de probabilité positive. Les états de probabilité nulle ne contribuent pas aux probabilités totales, notamment à $t = 0$.
- II.1.a), II.1.c), II.2.a), II.2.c) : précision que les restes des probabilités totales sont considérés à t fixé et peuvent dépendre de cet instant ; distinction de la dérivée à droite et de la dérivée usuelle. L'admission originale sur la dérivabilité est conservée sur $]0, +\infty[$, avec la dérivée à droite au bord $t = 0$.
- II.2.c) : rectification de la restriction originale $k \geq 1$ en $k \geq 0$; la démonstration couvre aussi une population initialement vide, autorisée dans le préambule.