



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1998

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie 2. Dans la partie 1, on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

Partie 1

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = e^{a(x-1)}.$$

On définit alors une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation :

$$u_{k+1} = f(u_k).$$

1. Convergence de la suite (u_k) .

1. (a) Établir par récurrence, pour tout nombre entier naturel k , les inégalités :

$$0 \leq u_k \leq 1 \quad \text{et} \quad u_k \leq u_{k+1}.$$

1. (b) En déduire la convergence de la suite (u_k) , dont on notera la limite $L(a)$.

2. Limite de la suite (u_k) lorsque $a < 1$.

2. (a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que :

$$0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k).$$

2. (b) En déduire l'inégalité $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$ pour tout nombre entier naturel k , puis la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $0 < a < 1$.

3. Limite de la suite (u_k) lorsque $a \geq 1$.

3. (a) On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.

- Prouver que $0 \leq 1 - \frac{\ln a}{a} \leq 1$ pour $a \geq 1$.
- Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a .
- En déduire la variation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$.
Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation $f(x) = x$.

On convient désormais de noter $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$. On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$, et que $r(1) = 1$.

3. (b) On étudie ici la plus petite racine $r(a)$ de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geq 1$.

- Étudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto xe^{-x}$.
- Comparer les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction.
- En déduire que la fonction Φ , définie pour $0 \leq x \leq 1$ par $\Phi(x) = xe^{-x}$, réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1/e]$ et montrer que la fonction Φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0, 1/e]$ (on citera le théorème utilisé). Dresser le tableau de variation de Φ^{-1} .
- Prouver que $r(a) = \frac{1}{a}\Phi^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de $r(a)$ en $+\infty$.

3. (c) On étudie maintenant la limite de la suite (u_k) lorsque $a \geq 1$.

- Établir l'inégalité $0 \leq u_k \leq r(a)$ pour tout nombre entier naturel k .
- En déduire la limite $L(a)$ de la suite (u_k) pour $a \geq 1$.

- Écrire en Python un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près. On obtient ainsi $L(2) \simeq 0,20$, $L(4) \simeq 0,02$, etc.

4. Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

Partie 2

Dans cette partie, le temps est supposé discrétisé et se présente donc comme une succession d'instants $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. On considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans un intervalle de temps $[n-1, n]$, c'est-à-dire entre deux instants consécutifs quelconques $n-1$ et n , avec $n \geq 1$.

On suppose qu'un premier client est au guichet à l'instant 0. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par B_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 si un client se présente au guichet entre les instants $n-1$ et n , et 0 sinon. Le client ainsi arrivé se place au bout de la file d'attente devant le guichet.

Ces variables aléatoires $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ sont supposées indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité p , où $0 < p < 1$.

On appelle durée de service d'un client au guichet le temps passé par l'employé du guichet à le servir, une fois son attente dans la file achevée. Le service suit l'ordre d'arrivée et commence dès que le guichet est libre. Si la durée de service du premier client est égale à n , le guichet est libre pour le service du client suivant à partir de l'instant n .

Les variables aléatoires indiquant les durées de service des clients successifs sont supposées indépendantes et suivent la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Toute la famille des durées de service est indépendante de toute la famille des variables B_n . Une durée de service nulle est possible. En particulier, on notera D la durée de service du client initial.

On étudie uniquement la période d'activité issue du client initial, jusqu'au premier instant où il n'y a plus personne au guichet. Les arrivées postérieures à cet instant ne

font pas partie de la file étudiée.

On appelle première vague de clients l'ensemble de ceux arrivés au guichet pendant la durée de service du client initial, puis, de façon générale, on appelle $(k + 1)$ -ième vague de clients l'ensemble de ceux arrivés pendant la durée de service des clients de la k -ième vague.

On désigne par N_k le nombre aléatoire des clients de la k -ième vague, étant entendu que l'on pose $N_k = 0$ s'il n'y a pas de client de cette vague. Par convention, on pose $N_0 = 1$.

1. Loi de la variable aléatoire N_1 .

1. (a) Étant donné un entier naturel n , déterminer la loi de N_1 conditionnée par l'événement $D = n$. On précisera les expressions des probabilités conditionnelles $P(N_1 = k \mid D = n)$.

1. (b) En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre et l'espérance.

2. Probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève.

Dans toute la suite du problème, on convient de poser $p_k = P(N_k = 0)$.

2. (a) Prouver que l'événement «la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini», autrement dit «il n'y a plus personne au guichet au bout d'un temps fini», est la réunion des événements $\{N_k = 0\}$, pour $k \geq 1$.

Montrer que cette suite d'événements $(\{N_k = 0\})_{k \geq 1}$ est croissante et en déduire :

- que la suite $(p_k)_{k \geq 1} = (P(N_k = 0))_{k \geq 1}$ est convergente vers une limite $L \leq 1$;
- que la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini est égale à cette limite L .

2. (b) Justifier, pour tous entiers naturels j, k , les formules :

$$P(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = 1) = P(N_k = 0),$$

$$P(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = (P(N_k = 0))^j.$$

Pour $j = 0$, le membre de droite est par convention égal à 1, y compris lorsque $p_k = 0$.

2. (c) En déduire l'expression de $p_{k+1} = P(N_{k+1} = 0)$ en fonction de p_k , préciser p_0 et, à l'aide des résultats de la partie 1, déterminer la limite de la suite (p_k) et la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini.

On discutera et interprétera le résultat obtenu en fonction des valeurs de λp .

2. (d) Déterminer les valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service d'un client est égale à 1, 2, 4 ou 8 instants, tandis que la probabilité pour qu'un client se présente entre deux instants consécutifs donnés est égale à 0,5 d'abord, à 0,25 ensuite.

3. Calcul de l'espérance $E(N_k)$ de la variable aléatoire N_k .

Pour un événement $\{N_k = i\}$ de probabilité strictement positive, on appelle « espérance de N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$ », et on note $E(N_{k+1} \mid N_k = i)$, l'espérance de N_{k+1} lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant cet événement réalisé. Elle est définie, si elle existe, par :

$$E(N_{k+1} \mid N_k = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} j P(N_{k+1} = j \mid N_k = i).$$

Dans les sommes ci-dessous, les indices i tels que $P(N_k = i) = 0$ sont omis, ou leur contribution est fixée à 0.

3. (a) On suppose l'événement $N_k = i$ réalisé, avec $P(N_k = i) > 0$. Déterminer alors la loi de la durée totale de service de ces i clients de la k -ième vague, en distinguant les

cas $i = 0$ et $i \geq 1$.

En déduire la loi de N_{k+1} conditionnée par l'événement $N_k = i$ et vérifier que $E(N_{k+1} \mid N_k = i) = i\lambda p$.

3. (b) On suppose que l'espérance $E(N_k)$ existe. Établir que :

$$E(N_k) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i) E(N_{k+1} \mid N_k = i).$$

En admettant qu'il est alors licite de permuter les deux sommes dans le calcul, établir l'existence de $E(N_{k+1})$ et donner son expression en fonction de λ , p et de $E(N_k)$. Cette permutation sera justifiée dans l'appendice.

3. (c) En déduire l'existence et l'expression de $E(N_k)$.

3. (d) Déterminer l'espérance du nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la n -ième vague incluse, en comptant également le client initial.

3. (e) Discuter et interpréter la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$ pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient-on numériquement dans les cas évoqués dans la question 2. (d) ?

4. Appendice : permutation de deux sommes à termes positifs ou nuls.

Dans cette question indépendante des précédentes, on se propose de justifier la permutation des sommes faite dans la question 3. Pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on donne un nombre réel $v_{i,j} \geq 0$ et l'on note, sous réserve de convergence :

$$A_i = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j}, \quad B_j = \sum_{i=0}^{+\infty} v_{i,j}.$$

On se propose d'établir l'égalité suivante :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{i,j} \right),$$

l'existence finie de l'un des deux membres impliquant alors l'existence finie de l'autre.

4. (a) On suppose que les séries définissant les nombres A_i sont convergentes et que la série

$$\sum A_i$$

est convergente. Établir, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{j=0}^q \left(\sum_{i=0}^p v_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^p \left(\sum_{j=0}^q v_{i,j} \right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} \right).$$

En déduire la convergence des séries définissant les nombres B_j puis, en faisant tendre p vers $+\infty$ et en étudiant ensuite les sommes partielles indexées par q , la convergence de la série

$$\sum B_j$$

et l'inégalité :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{i,j} \right) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} \right).$$

4. (b) Quel résultat analogue peut-on obtenir en permutant les hypothèses portant sur les nombres A_i et B_j ? Quelle conclusion en tire-t-on ?

4. (c) Si X et Y désignent deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, préciser enfin sous quelles hypothèses il est licite d'écrire :

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i)E(Y \mid X = i).$$

Les indices i tels que $P(X = i) = 0$ sont omis, ou leur contribution est fixée à 0.