



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1998

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie 1

On fixe $a > 0$. On utilise $f(x) = e^{a(x-1)}$, $u_0 = 0$ et $u_{k+1} = f(u_k)$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puisque $f'(x) = ae^{a(x-1)} > 0$.

1. (a) Encadrement et monotonie.

Les propriétés se démontrent simultanément par récurrence. Pour $k = 0$, on a $0 \leq u_0 = 0 \leq 1$ et $u_1 = e^{-a} > 0 = u_0$.

Supposons $0 \leq u_k \leq 1$ et $u_k \leq u_{k+1}$. Comme f est croissante et $f(1) = 1$, on obtient $0 < f(u_k) \leq 1$, donc $0 \leq u_{k+1} \leq 1$. La croissance donne aussi $f(u_k) \leq f(u_{k+1})$, c'est-à-dire $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.

Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_k \leq 1$ et $u_k \leq u_{k+1}$.

1. (b) Convergence.

La suite (u_k) est croissante et majorée par 1. Le théorème de convergence des suites monotones assure l'existence d'une limite $L(a) \in [0, 1]$.

Par continuité de f , le passage à la limite dans $u_{k+1} = f(u_k)$ donne :

$$L(a) = e^{a(L(a)-1)}.$$

La limite est donc un point fixe de f . Cela ne suffit pas encore à la déterminer lorsque plusieurs points fixes existent.

2. (a) Inégalité des accroissements finis.

Sur $[0, 1]$, on a $0 < f'(x) = ae^{a(x-1)} \leq a$. Les deux nombres u_k et 1 appartiennent à cet intervalle. L'inégalité des accroissements finis donne :

$$|f(1) - f(u_k)| \leq a|1 - u_k|.$$

Puisque $u_k \leq 1$ et $u_{k+1} \leq 1$, cela s'écrit :

$$0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a(1 - u_k).$$

Cette inégalité est en fait valable pour tout $a > 0$; elle entraîne une convergence géométrique vers 1 lorsque $a < 1$.

2. (b) Valeur de la limite pour $0 < a < 1$.

Méthode 1 — Itération de l'encadrement.

Pour $k = 0$, $1 - u_0 = 1 = a^0$. Si $0 \leq 1 - u_k \leq a^k$, la question précédente donne $0 \leq 1 - u_{k+1} \leq a^{k+1}$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1 - u_k \leq a^k.$$

Pour $0 < a < 1$, $a^k \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne $u_k \rightarrow 1$, donc $L(a) = 1$. L'encadrement fournit également une majoration explicite de l'erreur.

Méthode 2 — Unicité du point fixe sur l'intervalle stable.

La limite $L(a) \in [0, 1]$ vérifie $f(L(a)) = L(a)$. Appliquons directement l'inégalité des accroissements finis entre $L(a)$ et 1 :

$$0 \leq 1 - L(a) = f(1) - f(L(a)) \leq a(1 - L(a)).$$

On en déduit $(1 - a)(1 - L(a)) \leq 0$. Les deux facteurs sont positifs ou nuls et $1 - a > 0$, donc $L(a) = 1$.

Cette seconde méthode identifie la limite sans estimer la vitesse de convergence ; la première est préférable pour contrôler une approximation.

3. (a) Points fixes pour $a \geq 1$.

Posons $g_a(x) = e^{a(x-1)} - x$ et $c(a) = 1 - \frac{\ln a}{a}$.

Pour $a \geq 1$, $\ln a \geq 0$. De plus, la fonction $t \mapsto t - 1 - \ln t$ s'annule en 1 et sa dérivée $1 - 1/t$ est positive ou nulle sur $[1, +\infty[$. Ainsi $\ln a \leq a - 1 < a$, d'où :

$$0 < c(a) \leq 1.$$

Cela implique l'encadrement demandé $0 \leq c(a) \leq 1$.

L'équation $f'(x) = 1$ est équivalente à $ae^{a(x-1)} = 1$, donc à $a(x-1) = -\ln a$. Elle possède l'unique solution $x = c(a)$.

Puisque $g'_a(x) = ae^{a(x-1)} - 1$, la fonction g_a est strictement décroissante sur $] -\infty, c(a)]$ et strictement croissante sur $[c(a), +\infty[$.

Pour $a = 1$, $c(1) = 1$ et $g_1(1) = 0$. Son minimum est donc 0, atteint uniquement en 1. L'équation $f(x) = x$ possède exactement une racine réelle : $r(1) = 1$.

Pour $a > 1$, $c(a) < 1$ et :

$$g_a(c(a)) = \frac{1}{a} - c(a) = \frac{1 + \ln a - a}{a} < 0,$$

car $\ln a < a - 1$ pour $a > 1$. D'autre part, $g_a(0) = e^{-a} > 0$ et $g_a(1) = 0$. Par continuité et stricte décroissance, il existe une unique racine dans $]0, c(a)[$. Sur $[c(a), +\infty[$, la stricte croissance montre que la seule racine est 1. Aucune racine n'est possible pour $x < 0$, puisque $e^{a(x-1)} > 0 > x$.

Ainsi, pour $a > 1$, les deux racines réelles sont $r(a)$ et 1, avec :

$$0 < r(a) < c(a) < 1.$$

3. (b) Expression et limite de la plus petite racine.

Étude de la fonction auxiliaire.

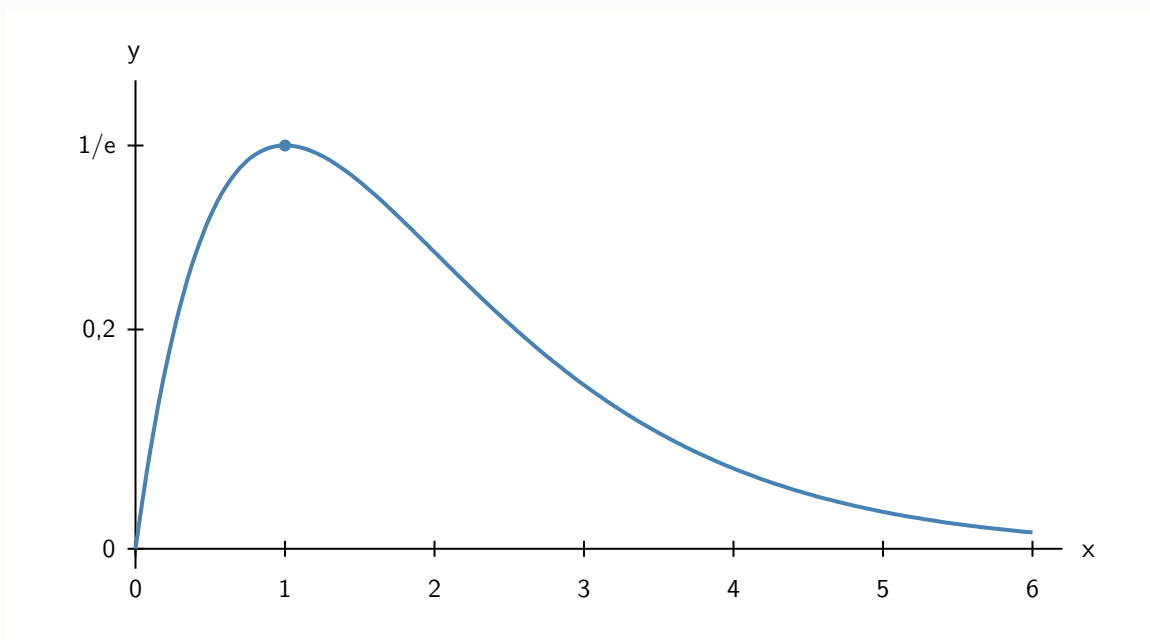
Notons $h(x) = xe^{-x}$ pour $x \geq 0$. Sa dérivée est $h'(x) = (1-x)e^{-x}$. Elle est strictement croissante sur $[0, 1]$, strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, et vérifie :

$$h(0) = 0, \quad h(1) = \frac{1}{e}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

La dernière limite découle de la croissance comparée de l'exponentielle et de la puissance x . La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale en $+\infty$.

x	0	1	$+\infty$
$h(x)$	0	maximum $1/e$	limite 0
Variation	croissance jusqu'à 1 décroissance après 1		

La représentation suivante utilise directement la formule $h(x) = xe^{-x}$; la fenêtre affichée est $[0, 6]$.



Images de a et de $ar(a)$.

L'identité $r(a) = e^{a(r(a)-1)}$ donne, en multipliant par $ae^{-ar(a)}$:

$$ar(a)e^{-ar(a)} = ae^{-a}.$$

Ainsi $h(ar(a)) = h(a)$.

Pour $a > 1$, on sait $0 < ar(a) < a$. Si $ar(a) \geq 1$, les deux nombres $ar(a)$ et a appartiendraient à l'intervalle de stricte décroissance de h , ce qui donnerait $h(ar(a)) > h(a)$, contradiction. Par conséquent :

$$0 < ar(a) < 1 \quad \text{pour } a > 1.$$

Pour $a = 1$, $ar(a) = 1$.

Bijection et fonction réciproque.

La restriction Φ de h à $[0, 1]$ est continue et strictement croissante. Le théorème de la bijection assure qu'elle réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1/e]$, dont la réciproque Φ^{-1} est continue et strictement croissante. Ses valeurs aux bornes sont $\Phi^{-1}(0) = 0$ et $\Phi^{-1}(1/e) = 1$.

y	0	$1/e$
$\Phi^{-1}(y)$	0	1
Variation	strictement croissante	

Comme $ar(a) \in [0, 1]$ et $\Phi(ar(a)) = ae^{-a}$, on peut appliquer la réciproque :

$$ar(a) = \Phi^{-1}(ae^{-a}), \quad r(a) = \frac{1}{a} \Phi^{-1}(ae^{-a}).$$

Pour la limite, $0 < r(a) \leq 1/a$ pour $a \geq 1$. Le théorème d'encadrement donne donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} r(a) = 0.$$

On peut aussi lire cette limite dans la formule : $ae^{-a} \rightarrow 0$ et la continuité de Φ^{-1} donne $\Phi^{-1}(ae^{-a}) \rightarrow 0$.

3. (c) Limite de la suite et algorithme.

Pour $k = 0$, $0 \leq u_0 = 0 \leq r(a)$. Si $0 \leq u_k \leq r(a)$, la croissance de f et $f(r(a)) = r(a)$ donnent $0 < u_{k+1} \leq r(a)$. Par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_k \leq r(a).$$

En passant à la limite, $0 \leq L(a) \leq r(a)$. Or $L(a)$ est une racine de $f(x) = x$, et $r(a)$ est la plus petite racine. Cela impose $L(a) = r(a)$ pour $a \geq 1$. En particulier, $L(1) = 1$.

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Une dichotomie permet de garantir l'erreur. Pour $a > 1$, la question 3. (a) donne un encadrement de la petite racine par 0 et $c(a)$, avec $g_a(0) > 0$ et $g_a(c(a)) < 0$. Sur cet

intervalle, g_a est strictement décroissante. Il ne faut pas employer l'intervalle $[0, 1]$ sans précaution, car sa borne droite est elle-même l'autre racine.

Python

```
import numpy as np

def limite(a):
    # Précondition : a > 0.
    if a <= 1:
        return 1.0
    gauche = 0.0
    droite = 1.0 - np.log(a) / a
    while droite - gauche > 0.01:
        milieu = (gauche + droite) / 2.0
        valeur = np.exp(a * (milieu - 1.0)) - milieu
        if valeur > 0:
            gauche = milieu
        else:
            droite = milieu
    return (gauche + droite) / 2.0
```

Les variables gauche et droite encadrent toujours $r(a)$. À chaque passage, la longueur de l'intervalle est divisée par 2, donc la boucle termine. À sa sortie, cette longueur est au plus 0,01 ; le milieu renvoyé est donc à une distance au plus 0,005 de $L(a)$, en arithmétique exacte. L'erreur demandée de 10^{-2} est ainsi garantie. Pour $a \leq 1$, la valeur renvoyée est exacte.

Le code a été exécuté pour les paramètres du sujet et plusieurs valeurs voisines du seuil 1. Des calculs avec une dichotomie plus précise donnent $L(2) \simeq 0,2031878700$ et $L(4) \simeq 0,0198274013$. Les valeurs 0,20 et 0,02 annoncées dans l'énoncé sont donc correctes à 10^{-2} près. Ces calculs numériques illustrent les résultats ; la preuve de convergence et le contrôle théorique de l'erreur sont les arguments précédents.

4. Allure de la courbe de L .

Les résultats donnent :

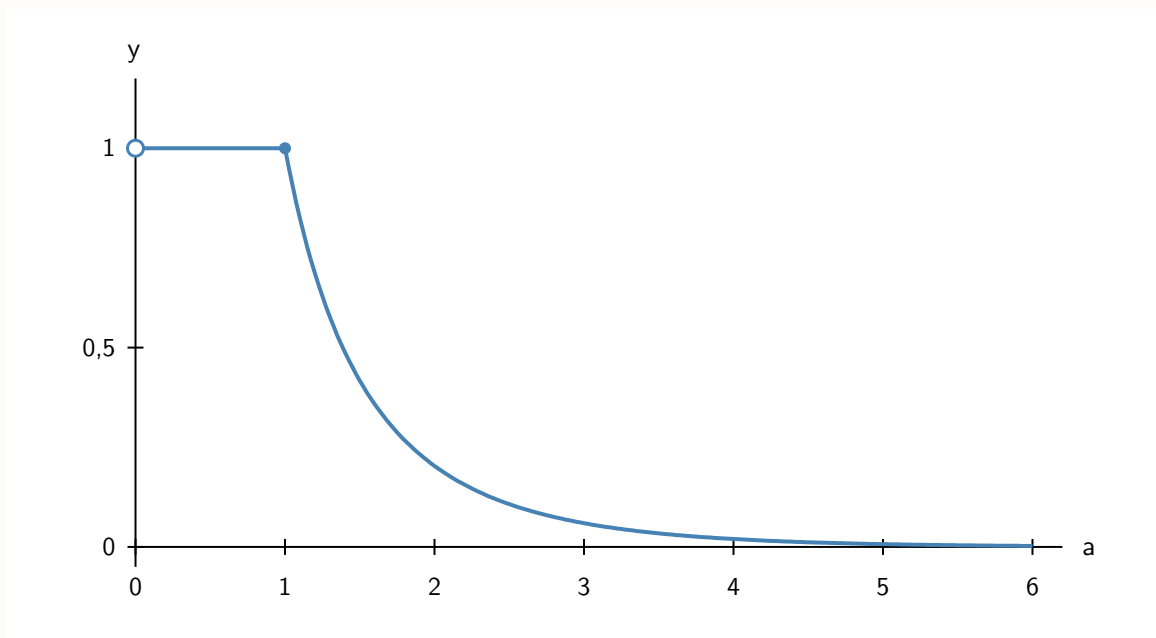
$$L(a) = \begin{cases} 1, & 0 < a \leq 1, \\ \frac{1}{a}\Phi^{-1}(ae^{-a}), & a > 1. \end{cases}$$

Pour $a > 1$, la fonction $a \mapsto ae^{-a}$ est strictement décroissante. Comme Φ^{-1} est strictement croissante, $q(a) = \Phi^{-1}(ae^{-a})$ est strictement décroissante et strictement positive. Si $1 < a < b$, alors :

$$\frac{q(b)}{b} < \frac{q(a)}{b} < \frac{q(a)}{a}.$$

Donc L est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. Sa continuité sur cet intervalle résulte de celle des fonctions intervenant dans sa formule. Lorsque $a \rightarrow 1^+$, $ae^{-a} \rightarrow 1/e$, donc $q(a) \rightarrow 1$ et $L(a) \rightarrow 1$. La fonction est ainsi continue sur $]0, +\infty[$.

La courbe est horizontale à la hauteur 1 pour $0 < a \leq 1$, puis décroît continûment vers 0. La droite $y = 0$ est une asymptote horizontale en $+\infty$. L'extrémité $a = 0$ ne fait pas partie du domaine. La figure ci-dessous est calculée à partir de l'équation des points fixes, dans la fenêtre $0 \leq a \leq 6$.



Partie 2

On pose $a = \lambda p > 0$ lorsque l'on applique la partie 1. Il faut distinguer p , probabilité d'arrivée par intervalle, de p_k , probabilité que la vague k soit vide.

Précisions sur le modèle.

Question adaptée au programme actuel dans le préambule. L'indépendance entre la famille des arrivées et celle des durées de service a été explicitée. L'indépendance des durées entre elles ne suffisait pas, à elle seule, à justifier les lois conditionnelles demandées. L'étude concerne la première période d'activité : une reprise du service après qu'une file s'est vidée n'appartient pas à cette période.

Pendant le service d'un client, chaque intervalle contribue une arrivée de Bernoulli de paramètre p . Les intervalles affectés à des services différents sont disjoints. Les durées des clients non encore servis sont indépendantes de l'histoire déjà observée.

Pour justifier cette propriété lorsque le début du service est aléatoire, on peut conditionner sur sa valeur entière s et sur une histoire fixée jusqu'à s . Cette histoire ne fait intervenir que les arrivées déjà observées et les durées déjà utilisées. Les variables $B_{s+1}, B_{s+2}, \dots$ et la prochaine durée conservent donc leurs lois et leur indépendance. En sommant sur les histoires possibles, le nombre de clients arrivant pendant chaque nouveau service a la même loi que N_1 , indépendamment des nombres obtenus pour les services précédents.

Plus précisément, pour un nombre fini de services, les probabilités de valeurs prescrites pour leurs nombres d'arrivées se calculent successivement par probabilités composées ; chaque facteur est la même probabilité que pour un service isolé. Cela établit leur indépendance. On peut prolonger artificiellement cette exploration après une extinction par des services indépendants, sans modifier la file étudiée. Cette description permet de regrouper les clients par ascendance dans la question 2. (b).

1. (a) Loi conditionnelle de la première vague.

Sur $\{D = n\}$, on a $N_1 = B_1 + \dots + B_n$. L'indépendance entre D et les arrivées assure que, conditionnellement à $D = n$, ces n variables restent indépendantes, chacune de loi de Bernoulli de paramètre p .

Pour $n \geq 1$, la loi conditionnelle est donc binomiale de paramètres n et p :

$$P(N_1 = k \mid D = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, le service est instantané, donc $N_1 = 0$; la loi est certaine en 0. On peut l'écrire $\mathcal{B}(0, p)$. Les probabilités conditionnelles sont bien définies, car

$P(D = n) = e^{-\lambda} \lambda^n / n! > 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

1. (b) Loi et espérance de N_1 .

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Les événements $\{D = n\}$ constituent un système complet. La formule des probabilités totales donne :

$$P(N_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

En utilisant $\binom{n}{k} / n! = 1 / (k!(n-k)!)$ et le changement d'indice $m = n - k$, on obtient :

$$P(N_1 = k) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}.$$

La série exponentielle converge pour tout réel et sa somme est $e^{\lambda(1-p)}$. Ainsi :

$$P(N_1 = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

C'est la loi de Poisson de paramètre λp . Son espérance existe et vaut $E(N_1) = \lambda p = a$.

2. (a) Extinction et événements croissants.

Notons $A_k = \{N_k = 0\}$ pour $k \geq 1$, et A l'événement que la période d'activité initiale se termine en temps fini.

Si $N_k = 0$, aucun client de cette vague n'est à servir et aucune vague suivante ne peut se former. On a donc $N_{k+1} = 0$, ce qui prouve $A_k \subset A_{k+1}$.

Chaque vague contient un nombre fini de clients presque sûrement. En effet, la vague initiale contient un seul client ; une somme finie de durées de Poisson est finie, et il arrive au plus un client par intervalle. Une récurrence établit cette finitude pour toute vague fixée.

Si une vague est vide, il n'y a que finitement de vagues antérieures, chacune finie. La durée totale des services correspondants est une somme finie de durées finies : la file se vide donc en temps fini. Ainsi $\bigcup_{k \geq 1} A_k \subset A$.

Réciproquement, si la file se vide à un instant fini T , elle n'a accueilli, en plus du client initial, qu'un nombre fini de clients : au plus un par intervalle avant T . Si toutes les vagues étaient non vides, elles fourniraient une infinité de clients distincts pendant cette période, contradiction. Une vague est donc vide, et $A \subset \bigcup_{k \geq 1} A_k$.

Cette justification couvre les durées nulles : elles ne produisent aucune arrivée et ne peuvent engendrer une infinité de clients en un temps borné. Sur l'événement de probabilité 1 où toutes les durées sont finies, on a donc :

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

Les probabilités $p_k = P(A_k)$ forment une suite croissante et majorée par 1. Elle converge vers un réel $L \in [0, 1]$. La continuité croissante des probabilités donne :

$$P(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k) = L.$$

2. (b) Décomposition selon la première vague.

Chaque client arrivé pendant le service d'un client donné est considéré comme son descendant direct. Conditionnellement à $N_1 = j$, la première vague fournit j clients, chacun à l'origine d'une descendance. Pour chaque profondeur finie, ces j descendances ont des lois identiques à celle issue du client initial et sont indépendantes : les nombres d'arrivées pendant les services successifs sont indépendants, comme expliqué dans le préambule du corrigé.

La vague globale $k + 1$ est vide exactement lorsque la vague de profondeur k est vide dans chacune de ces j descendances. Pour $j \geq 1$, chaque événement a la probabilité p_k ,

et leur indépendance donne :

$$P(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = j) = p_k^j.$$

Pour $j = 1$, cela redonne $P(N_{k+1} = 0 \mid N_1 = 1) = p_k$.

Pour $j = 0$, toutes les vagues suivantes sont vides, donc la probabilité conditionnelle vaut 1. La convention de l'énoncé rend la formule valable aussi dans ce cas. Pour $k = 0$ et $j \geq 1$, la probabilité vaut 0, puisque $N_1 = j > 0$, et $p_0^j = 0$.

Toutes les conditions $N_1 = j$ ont une probabilité strictement positive, d'après sa loi de Poisson de paramètre $a > 0$.

2. (c) Récurrence et probabilité d'extinction.

La formule des probabilités totales appliquée à N_1 donne, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$p_{k+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} p_k^j e^{-a} \frac{a^j}{j!} = e^{-a} e^{ap_k} = e^{a(p_k-1)}.$$

Le terme $j = 0$ vaut e^{-a} , y compris pour $p_k = 0$. Puisque $N_0 = 1$ de façon certaine, $p_0 = 0$.

La suite (p_k) est exactement celle de la partie 1 avec le paramètre $a = \lambda p$. D'après 2. (a), la probabilité d'extinction en temps fini est donc :

$$P(A) = L(\lambda p) = \begin{cases} 1, & \lambda p \leq 1, \\ r(\lambda p), & \lambda p > 1. \end{cases}$$

Dans le second cas, $r(\lambda p)$ est la petite racine de $x = e^{\lambda p(x-1)}$ et appartient à $]0, 1[$. La probabilité que la période d'activité se poursuive indéfiniment vaut alors $1 - r(\lambda p) > 0$.

Le paramètre λp représente le nombre moyen d'arrivées pendant un service. Pour $\lambda p < 1$, chaque vague engendre en moyenne moins de clients qu'elle n'en contient : l'extinction est presque sûre. Au seuil $\lambda p = 1$, l'extinction reste presque sûre. Pour

$\lambda p > 1$, le renouvellement moyen dépasse un client par client servi, mais l'extinction demeure possible : elle n'est pas exclue par cette moyenne.

2. (d) Valeurs numériques.

La durée moyenne de service est $E(D) = \lambda$. Il suffit donc de calculer $a = \lambda p$, puis d'appliquer $L(a)$.

λ	a pour $p = 0,5$	Extinction pour $p = 0,5$	a pour $p = 0,25$	Extinction pour $p = 0,25$
1	0,5	1 exactement	0,25	1 exactement
2	1	1 exactement	0,5	1 exactement
4	2	$\simeq 0,20$	1	1 exactement
8	4	$\simeq 0,02$	2	$\simeq 0,20$

Pour les deux valeurs non triviales, la dichotomie donne $L(2) \simeq 0,2031878700$ et $L(4) \simeq 0,0198274013$. Ces arrondis ont une erreur absolue inférieure à 10^{-2} .

3. (a) Durée totale et loi conditionnelle de la vague suivante.

Question adaptée au programme actuel : on ne conditionne que sur un événement $\{N_k = i\}$ de probabilité strictement positive.

Méthode 1 — Conditionnement par la durée totale.

Notons T_k la durée totale de service des clients de la vague k . Sachant $N_k = i$, les durées de ces clients n'ont pas encore été utilisées pour déterminer leur nombre : celui-ci dépend des services des vagues antérieures. Elles restent donc indépendantes, de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Pour $i = 0$, il n'y a aucun client, donc $T_k = 0$ et $N_{k+1} = 0$ de façon certaine. L'espérance

conditionnelle vaut 0.

Pour $i \geq 1$, la stabilité de la loi de Poisson par somme de variables indépendantes donne :

$$(T_k \mid N_k = i) \sim \mathcal{P}(i\lambda).$$

Sachant aussi $T_k = n$, les arrivées pendant ces services se font dans n intervalles consécutifs ; elles sont indépendantes de leurs durées et de l'histoire antérieure. Leur nombre a donc la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Le calcul de 1. (b), avec λ remplacé par $i\lambda$, donne :

$$P(N_{k+1} = j \mid N_k = i) = e^{-i\lambda p} \frac{(i\lambda p)^j}{j!}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, pour $i \geq 1$, la loi conditionnelle est $\mathcal{P}(i\lambda p)$, son espérance existe et vaut $i\lambda p$. Avec le cas $i = 0$, on obtient :

$$E(N_{k+1} \mid N_k = i) = i\lambda p = ia.$$

Méthode 2 — Somme des nombres d'arrivées par client.

Sachant $N_k = i \geq 1$, notons $C_1, \dots, C_i$ les nombres de clients arrivant pendant les services respectifs des i clients de cette vague. La propriété d'indépendance des services explorés, établie dans le préambule, montre que les C_ℓ sont indépendants et ont tous la loi de N_1 , donc la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$ d'après 1. (b).

On a $N_{k+1} = C_1 + \dots + C_i$. Par stabilité de la loi de Poisson sous une somme indépendante, sa loi conditionnelle est $\mathcal{P}(i\lambda p)$. Chacun des termes possède une espérance finie, et la linéarité donne également $E(N_{k+1} \mid N_k = i) = i\lambda p$. Pour $i = 0$, la somme est vide et vaut 0, ce qui redonne la loi certaine en 0.

La première méthode étudie explicitement la durée totale demandée par l'énoncé. La seconde retrouve la loi de la vague suivante directement à partir des arrivées produites par chaque client ; elle éclaire la structure des générations.

3. (b) Récurrence sur les espérances.

Question adaptée au programme actuel : les contributions des événements de probabilité nulle sont fixées à 0, sans définir une probabilité conditionnelle sur ces événements.

Supposons $E(N_k) < +\infty$. La question précédente donne :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i) E(N_{k+1} \mid N_k = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i) i a = a E(N_k).$$

Cette série converge, car $a > 0$ est fini et $E(N_k)$ est finie. En divisant par $a = \lambda p > 0$, on obtient l'identité demandée.

Pour établir maintenant l'existence de $E(N_{k+1})$, posons $v_{i,j} = jP(N_k = i, N_{k+1} = j) \geq 0$. Pour un indice i de probabilité positive, la définition de la probabilité conditionnelle donne :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} = P(N_k = i) E(N_{k+1} \mid N_k = i).$$

Pour un indice de probabilité nulle, toute la ligne $v_{i,j}$ est nulle. La somme des lignes est donc finie et vaut $aE(N_k)$. La permutation autorisée dans cette question, et démontrée dans l'appendice, donne :

$$aE(N_k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} jP(N_k = i, N_{k+1} = j).$$

Pour chaque j , les événements $\{N_k = i\}$ forment un système complet, donc la somme intérieure vaut $jP(N_{k+1} = j)$. Il en résulte :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j) = aE(N_k) < +\infty.$$

Comme N_{k+1} est positive ou nulle, cette convergence est exactement la condition d'existence de son espérance. Finalement :

$$E(N_{k+1}) = \lambda p E(N_k) = a E(N_k).$$

Il n'a pas été supposé au départ que $E(N_{k+1})$ existait : sa finitude est une conséquence de la permutation et de l'hypothèse sur $E(N_k)$.

3. (c) Espérance de chaque vague.

Puisque $N_0 = 1$, $E(N_0) = 1$ existe. La question précédente assure par récurrence l'existence de toutes les espérances et la relation $E(N_{k+1}) = a E(N_k)$.

On obtient donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(N_k) = a^k = (\lambda p)^k.$$

3. (d) Nombre cumulé de clients.

Question adaptée au programme actuel : l'énoncé précise que le client initial est compté.

Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^n N_k.$$

C'est une somme finie de variables ayant chacune une espérance finie. La linéarité de l'espérance donne, sans aucune hypothèse d'indépendance entre les vagues :

$$E(S_n) = \sum_{k=0}^n a^k.$$

Si $a \neq 1$, l'identité géométrique donne :

$$E(S_n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$, chaque terme vaut 1, donc $E(S_n) = n + 1$.

Si l'on souhaite compter seulement les nouveaux arrivants et exclure le client initial, il faut utiliser $S_n - 1$. Son espérance vaut $a(1 - a^n)/(1 - a)$ si $a \neq 1$, et n si $a = 1$.

3. (e) Limite et interprétation.

Pour $a = \lambda p < 1$, la formule précédente et $a^{n+1} \rightarrow 0$ donnent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n) = \frac{1}{1 - a}.$$

Cette limite décrit le nombre moyen total de clients pendant la période initiale. Pour le justifier sans échange automatique d'une limite et d'une espérance, définissons

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} N_k.$$

L'extinction est presque sûre pour $a < 1$, donc S est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ presque sûrement.

Pour toute variable Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, la permutation positive démontrée à l'appendice appliquée à $P(Z = m)$ répété m fois donne l'identité, lorsque l'une des sommes est finie :

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(Z \geq j).$$

On peut aussi la vérifier d'abord avec des sommes finies par

$$m = \sum_{j=1}^m 1,$$

puis passer aux limites monotones des sommes partielles.

Comme $S_n \leq S$, pour chaque entier $M \geq 1$:

$$E(S_n) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} P(S \geq j), \quad \sum_{j=1}^M P(S_n \geq j) \leq E(S_n) \leq \frac{1}{1 - a}.$$

Pour chaque j , les événements $\{S_n \geq j\}$ croissent vers $\{S \geq j\}$. La continuité croissante des probabilités, dans la somme finie de longueur M , donne :

$$\sum_{j=1}^M P(S \geq j) \leq \frac{1}{1-a}.$$

Les sommes partielles de cette série positive sont donc bornées. Elle converge et, par l'identité précédente, $E(S)$ existe et vaut sa somme. On obtient $E(S) \leq 1/(1-a)$.

D'autre part, $S_n \leq S$ implique $E(S_n) \leq E(S)$; en passant à la limite dans cette inégalité numérique, $1/(1-a) \leq E(S)$. Ainsi :

$$E(S) = \frac{1}{1-\lambda p}.$$

Pour les nouveaux arrivants seuls, l'espérance est $E(S-1) = \lambda p/(1-\lambda p)$.

Aux autres valeurs du paramètre, la formule de 3. (d) donne $E(S_n) \rightarrow +\infty$: linéairement lorsque $a = 1$, et géométriquement lorsque $a > 1$. Au seuil $a = 1$, la file se vide presque sûrement, mais le nombre total de clients n'a pas d'espérance finie. En effet, si $E(S)$ était finie, $E(S_n) \leq E(S)$ contredirait $E(S_n) = n + 1$. Pour $a > 1$, la période est infinie avec une probabilité strictement positive.

λ	a pour $p = 0,5$	Limite de $E(S_n)$	a pour $p = 0,25$	Limite de $E(S_n)$
1	0,5	2	0,25	$4/3 \simeq 1,33$
2	1	$+\infty$	0,5	2
4	2	$+\infty$	1	$+\infty$
8	4	$+\infty$	2	$+\infty$

Dans les cas où la limite est finie, les valeurs pour les nouveaux arrivants seuls sont respectivement 1, $1/3$ et 1.

4. (a) Première inégalité de permutation.

Question adaptée au programme actuel : l'appendice est présenté comme un résultat particulier à démontrer. Aucun théorème général d'interversion n'est invoqué.

Supposons que tous les nombres

$$A_i = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j}$$

soient finis et que

$$M = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i < +\infty.$$

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, une somme double finie peut être calculée dans les deux ordres :

$$\sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^p v_{i,j} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q v_{i,j}.$$

La positivité donne

$$\sum_{j=0}^q v_{i,j} \leq A_i$$

pour chaque i , puis :

$$0 \leq \sum_{j=0}^q \sum_{i=0}^p v_{i,j} \leq \sum_{i=0}^p A_i \leq M.$$

Fixons j . Pour tout p ,

$$0 \leq \sum_{i=0}^p v_{i,j} \leq M.$$

Ces sommes partielles sont croissantes et bornées, donc la série définissant B_j converge.

Fixons ensuite q . On peut faire tendre p vers $+\infty$ dans la somme finie de $q + 1$ termes :

$$\sum_{j=0}^q B_j \leq M.$$

Les sommes partielles de

$$\sum B_j$$

sont donc croissantes et majorées par M . Elles convergent, et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} B_j \leq \sum_{i=0}^{+\infty} A_i.$$

Les seuls passages à la limite utilisés portent sur une somme finie ou sur une suite croissante bornée ; aucune permutation de sommes infinies n'a été supposée.

4. (b) Inégalité réciproque et égalité.

Si l'on suppose au contraire que tous les B_j sont finis et que

$$\sum B_j$$

converge, le même raisonnement, avec les rôles de i et j échangés, établit la finitude des A_i , la convergence de

$$\sum A_i$$

et :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} A_i \leq \sum_{j=0}^{+\infty} B_j.$$

Sous les hypothèses de 4. (a), la convergence de

$$\sum B_j$$

vient d'être démontrée. On peut donc lui appliquer cette inégalité réciproque. Les deux inégalités donnent :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} v_{i,j} \right).$$

Ainsi, pour cette famille positive ou nulle, la finitude de l'une des sommes itérées entraîne celle de l'autre et leur égalité. La conclusion a été entièrement établie à partir des sommes rectangulaires finies et du théorème de convergence monotone des suites.

4. (c) Espérance totale dans le cadre discret.

Question adaptée au programme actuel : les indices correspondant à $P(X = i) = 0$ sont exclus des espérances conditionnelles, et leur contribution à la somme est fixée à 0.

Posons $v_{i,j} = jP(X = i, Y = j) \geq 0$. Pour chaque j , les probabilités totales donnent :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} v_{i,j} = jP(Y = j).$$

Pour chaque i tel que $P(X = i) > 0$, si l'espérance conditionnelle est finie, on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} v_{i,j} = P(X = i)E(Y | X = i).$$

Si $P(X = i) = 0$, tous les $v_{i,j}$ de cette ligne sont nuls.

Une première hypothèse suffisante est l'existence d'une espérance finie $E(Y)$. Dans ce cas, la somme des colonnes vaut $E(Y) < +\infty$. Le résultat de 4. (b) montre que toutes les lignes sont finies, donc que $E(Y | X = i)$ existe pour chaque indice de probabilité positive. Il assure aussi la convergence de la somme pondérée et :

$$E(Y) = \sum_{i:P(X=i)>0} P(X = i)E(Y | X = i).$$

Réciproquement, si chaque espérance conditionnelle sur un événement de probabilité positive existe et si la série pondérée

$$\sum_{i:P(X=i)>0} P(X = i)E(Y | X = i)$$

converge, la somme des lignes est finie. Le résultat de 4. (a)-(b) assure alors la finitude de la somme des colonnes, donc l'existence de $E(Y)$, et la même égalité.

Les deux conditions sont donc équivalentes pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$. Aucune indépendance de X et Y n'est nécessaire, et l'existence de $E(X)$ n'est pas requise.

Relevé des adaptations

- Partie 1, 3. (c) : algorithme converti en Python. Une dichotomie avec encadrement de la petite racine assure la précision demandée ; aucune instruction informatique de l'ancien langage n'est conservée.
- Partie 2, préambule, utilisé notamment en 1. (a), 2. (b) et 3. (a) : indépendance entre toutes les arrivées et toutes les durées de service explicitée. Elle est indispensable pour obtenir les lois conditionnelles et les descendance indépendantes. Ordre de service et fin de la période initiale explicités pour lever l'ambiguïté d'éventuelles arrivées après extinction.
- Partie 2, 2. (b) : convention du produit vide précisée pour $j = 0$, y compris lorsque $k = 0$ et $p_0 = 0$.
- Partie 2, préambule de 3, 3. (a)-(b), 4. (c) : conditionnements limités aux événements de probabilité strictement positive ; contributions des événements de probabilité nulle fixées à 0. Cela traite notamment $N_0 = 1$, pour lequel les autres valeurs de N_0 ont une probabilité nulle.
- Partie 2, 3. (d) : inclusion du client initial précisée dans le sujet. Le corrigé donne également la formule pour les seuls nouveaux arrivants.
- Partie 2, 4 et 4. (a) : titre reformulé et ordre des limites explicité. Le résultat particulier sur les séries positives est démontré avec les sommes finies et les suites monotones, sans supposer connu un théorème général hors référentiel.