



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1997

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

On considère un parc de m machines identiques, avec $m \geq 1$. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq m$, on note X_i la variable aléatoire indiquant la durée de marche de la i -ième machine, avant que celle-ci ne tombe en panne, à partir d'un instant 0.

On désigne par a un nombre réel strictement positif donné et l'on fait les hypothèses suivantes sur le fonctionnement des machines.

(H1) Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$, la variable aléatoire X_i , à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifie :

$$P(X_i < t + h \mid X_i \geq t) = ah + h\varepsilon(h),$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction indépendante de l'entier i et de l'instant t , qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0 par valeurs strictement positives. Les probabilités conditionnelles de (H1) sont supposées définies.

(H2) Les m machines fonctionnent indépendamment les unes des autres.

Pour tout nombre réel $t \geq 0$, on désigne par $N(t)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de machines en panne à l'instant t . Pour fixer la convention aux instants de panne, on compte une machine comme tombée en panne lorsque $X_i < t$:

$$N(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\{X_i < t\}}.$$

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq m$, on note $p_k(t) = P(N(t) = k)$.

On suppose toutes les machines en marche à l'instant 0, autrement dit $p_0(0) = 1$.

L'objectif est de déterminer, sous ces hypothèses, la loi du nombre aléatoire $N(t)$ de machines déjà tombées en panne à un instant t . Le résultat de l'étude est obtenu par deux méthodes indépendantes dans les parties 1 et 2.

Pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$, la dérivabilité en 0 s'entend comme une dérivabilité à droite.

Partie 1

On étudie ici la loi de la variable aléatoire $N(t)$ en déterminant la loi des variables aléatoires X_i introduites dans le préambule.

1. Loi de la durée de marche X_i d'une machine, $1 \leq i \leq m$

On désigne par (t, h) un couple de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$, et l'on note $g_i(t) = P(X_i \geq t)$ la probabilité pour que X_i soit supérieure ou égale à t .

(a) Comparer les événements $\{X_i \geq t\}$ et $\{t \leq X_i < t + h\} \cup \{X_i \geq t + h\}$.

En déduire l'expression de la probabilité $P(t \leq X_i < t + h)$ en fonction de $g_i(t)$ et $g_i(t + h)$, puis établir à l'aide de l'hypothèse (H1) l'égalité :

$$g_i(t) - g_i(t + h) = [ah + h\varepsilon(h)]g_i(t).$$

(b) En déduire successivement que :

$$0 \leq g_i(t) - g_i(t + h) \leq [a + \varepsilon(h)]h,$$

$$0 \leq g_i(t - h) - g_i(t) \leq [a + \varepsilon(h)]h \quad \text{lorsque } 0 < h \leq t.$$

En déduire que la fonction $t \mapsto g_i(t)$ est continue à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant le quotient $[g_i(t + h) - g_i(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \mapsto g_i(t)$ est dérivable à droite sur $[0, +\infty[$.

Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de a et de $g_i(t)$.

En déduire de même que la fonction $t \mapsto g_i(t)$ est continue à gauche sur $]0, +\infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0, +\infty[$.

(c) Établir que g_i est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $g'_i(t)$ en fonction de a et de $g_i(t)$.

En étudiant la fonction $t \mapsto \exp(at)g_i(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ et en remarquant que $g_i(0) = 1$, expliciter la fonction g_i .

- (d) En déduire la fonction de répartition, la densité, la loi et l'espérance des variables X_i , ainsi qu'une interprétation du nombre réel a .

2. Étude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$

Déduire des résultats précédents les probabilités $p_k(t)$, la loi et l'espérance de $N(t)$.

Quelle est la limite de $p_k(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$? Était-ce prévisible?

Partie 2

On étudie ici la loi de la variable aléatoire $N(t)$ en déterminant sa fonction génératrice $G(x, t)$, c'est-à-dire la fonction de la variable réelle x définie par :

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^m p_k(t) x^k.$$

Cette étude, indépendante de celle de la partie 1, n'utilise aucun de ses résultats.

1. Étude des probabilités conditionnelles $P(N(t+h) = k \mid N(t) = i)$

Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$, et tout couple (k, i) de nombres entiers tels que $0 \leq k \leq m$ et $0 \leq i \leq m$, on se propose d'étudier les probabilités conditionnelles $P(N(t+h) = k \mid N(t) = i)$ lorsque $p_i(t) > 0$.

À l'instant $t = 0$, seul le conditionnement par $N(0) = 0$ est défini. Les expressions de transition obtenues pourront être prolongées aux autres indices pour écrire des sommes, leurs coefficients étant alors multipliés par $p_i(0) = 0$; ces valeurs prolongées ne sont pas des probabilités conditionnelles à l'instant initial.

(a) Que vaut $P(N(t+h) = k \mid N(t) = i)$ si $k < i$?

(b) Établir à l'aide des hypothèses (H1) et (H2) que :

$$P(N(t+h) = k \mid N(t) = k) = (1 - ah - h\varepsilon(h))^{m-k}.$$

En déduire par un développement limité à l'ordre 1 que :

$$P(N(t+h) = k \mid N(t) = k) = 1 - (m-k)ah + h\varepsilon'(h),$$

où $\varepsilon'(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Ici et dans les questions suivantes, les primes sur les fonctions de reste sont des étiquettes et ne désignent pas des dérivées ; ces fonctions peuvent dépendre des indices fixés.

(c) Établir de même que, pour $1 \leq k \leq m$:

$$P(N(t+h) = k \mid N(t) = k-1) = (m-k+1)ah + h\varepsilon''(h),$$

où $\varepsilon''(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(d) Démontrer enfin que $P(N(t+h) = k \mid N(t) = i)$ est négligeable devant h si $k \geq i+2$, c'est-à-dire égale à $h\varepsilon'''(h)$ où $\varepsilon'''(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. On justifiera avec soin les résultats obtenus.

2. Étude des probabilités de panne $p_k(t)$, $0 \leq k \leq m$

(a) À l'aide de la formule des probabilités totales, déduire des résultats précédents, pour $t \geq 0$ et $h > 0$, la probabilité $p_k(t+h)$ en fonction des probabilités $p_j(t)$, $0 \leq j \leq m$.

Quelles expressions de $p_k(t+h) - p_k(t)$, puis de $p_k(t) - p_k(t-h)$, où $0 < h \leq t$, en résultent-elles ?

(b) En déduire que la fonction $t \mapsto p_k(t)$ est continue à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant le quotient $[p_k(t+h) - p_k(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \mapsto p_k(t)$ est dérivable à droite sur $[0, +\infty[$.

Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de $k, m, a, p_{k-1}(t)$ et $p_k(t)$. On pourra convenir, ce qui est naturel, que $p_{-1}(t) = 0$.

En déduire de même que la fonction $t \mapsto p_k(t)$ est continue à gauche sur $]0, +\infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0, +\infty[$.

(c) Établir, pour $0 \leq k \leq m$, que p_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $p'_k(t)$ en fonction de $k, m, a, p_{k-1}(t)$ et $p_k(t)$, puis en déduire la relation (R) suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = ma(x-1)G(x, t) - ax(x-1)\frac{\partial G}{\partial x}(x, t).$$

3. Étude d'un endomorphisme auxiliaire

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_m[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à m , et l'application f associant à tout polynôme U de $\mathbb{R}_m[X]$ le polynôme $V = f(U)$ défini par :

$$V(x) = ma(x-1)U(x) - ax(x-1)U'(x),$$

où U' désigne le polynôme dérivé de U .

(a) Établir que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$.

(b) Soit λ une valeur propre de f et soit P un polynôme propre unitaire associé à λ , c'est-à-dire un polynôme unitaire P tel que $f(P) = \lambda P$.

Établir que 0 ou 1 est racine de P .

On pose donc $P(X) = X^h(X-1)^k R(X)$, où R est un polynôme tel que $R(0) \neq 0$, $R(1) \neq 0$, et h, k deux nombres entiers naturels tels que $1 \leq h+k \leq m$.

Écrire l'égalité $f(P) = \lambda P$, que l'on simplifiera par $x^h(x-1)^k$, et, en faisant tendre x vers 0 et vers 1, déterminer h et λ en fonction de a, k, m , et P en fonction de k et m .

(c) Pour tout entier naturel $k \leq m$, on note W_k le polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$ défini par :

$$W_k(X) = X^{m-k}(X-1)^k.$$

Déterminer sous forme factorisée l'image par f du polynôme W_k .

Quelles sont les valeurs propres de l'endomorphisme f ? f est-il diagonalisable?

(d) Montrer que $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$, et déterminer les composantes du polynôme $U = 1$ dans cette base en développant l'égalité $[X - (X-1)]^m = 1$.

4. Étude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$

On décompose la fonction polynôme $x \mapsto G(x, t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$

d'une part, dans la base $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ de $\mathbb{R}_m[X]$ d'autre part :

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^m p_k(t) x^k = \sum_{k=0}^m q_k(t) W_k(x).$$

(a) On désigne par Π la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $W_0, W_1, \dots, W_m$ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^m)$.

Écrire une relation entre les deux matrices-colonnes de composantes

$q_0(t), q_1(t), \dots, q_m(t)$ d'une part, $p_0(t), p_1(t), \dots, p_m(t)$ d'autre part. En déduire que $q_0, q_1, \dots, q_m$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

(b) En utilisant l'expression de $x \mapsto G(x, t)$ dans la base $(W_0, W_1, \dots, W_m)$, établir que la relation (R) obtenue à la question 2 équivaut aux $m + 1$ égalités suivantes :

$$q'_k(t) = -akq_k(t) \quad (0 \leq k \leq m).$$

En déduire que la fonction $t \mapsto \exp(akt)q_k(t)$ est constante sur $\mathbb{R}_+$, et que l'on a, pour tout réel $t \geq 0$:

$$q_k(t) = C_k \exp(-akt),$$

où C_k est une constante réelle.

(c) Vérifier que $G(x, 0) = 1$ et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^m C_k W_k(X) = 1.$$

En comparant cette expression du polynôme $U = 1$ dans la base $(W_0, W_1, \dots, W_m)$ de $\mathbb{R}_m[X]$ à celle obtenue à la question 3, déterminer les constantes C_k , $0 \leq k \leq m$.

En déduire alors que :

$$G(x, t) = [(1 - \exp(-at))x + \exp(-at)]^m.$$

- (d) En développant cette expression de $G(x, t)$, en déduire à nouveau les probabilités $p_k(t)$, la loi et l'espérance de la variable aléatoire $N(t)$.