



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1997

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Préliminaires

On fixe $m \geq 1$ et $a > 0$. Les durées $X_1, \dots, X_m$ sont mutuellement indépendantes par (H2). On pose $q(h) = ah + h\varepsilon(h)$. Par (H1), $q(h)$ est une probabilité, donc $0 \leq q(h) \leq 1$, et $q(h)/h \rightarrow a$ lorsque $h \rightarrow 0^+$.

Question adaptée au programme actuel — préambule : les conventions aux instants de panne et au bord $t = 0$ sont explicitées. On utilise

$$N(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\{X_i < t\}}.$$

Les probabilités conditionnelles de (H1) étant définies, $P(X_i \geq t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

La dérivée d'une fonction sur $\mathbb{R}_+$ est une dérivée ordinaire sur $]0, +\infty[$ et une dérivée à droite en 0. Les deux parties ci-dessous sont résolues indépendamment : la partie 2 repart uniquement des hypothèses du préambule.

Partie 1

1. Loi de la durée de marche X_i d'une machine

(a) Décomposition de l'événement de survie

Les événements $\{t \leq X_i < t + h\}$ et $\{X_i \geq t + h\}$ sont disjoints et leur réunion est exactement $\{X_i \geq t\}$. L'additivité des probabilités donne donc :

$$P(t \leq X_i < t + h) = P(X_i \geq t) - P(X_i \geq t + h) = g_i(t) - g_i(t + h).$$

Comme $g_i(t) > 0$, la définition de la probabilité conditionnelle et (H1) donnent :

$$P(t \leq X_i < t + h) = P(X_i < t + h \mid X_i \geq t)P(X_i \geq t) = q(h)g_i(t).$$

Ainsi :

$$g_i(t) - g_i(t+h) = [ah + h\varepsilon(h)]g_i(t).$$

(b) Continuité et dérivées unilatérales

La fonction g_i est décroissante, car $\{X_i \geq t+h\} \subset \{X_i \geq t\}$. Puisque $0 \leq g_i(t) \leq 1$ et $q(h) \geq 0$, la question précédente entraîne :

$$0 \leq g_i(t) - g_i(t+h) = q(h)g_i(t) \leq q(h) = [a + \varepsilon(h)]h.$$

En appliquant la même égalité au temps $t-h \geq 0$, pour $0 < h \leq t$, on obtient :

$$0 \leq g_i(t-h) - g_i(t) = q(h)g_i(t-h) \leq [a + \varepsilon(h)]h.$$

Le majorant tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0^+$. Le premier encadrement prouve la continuité à droite en tout $t \geq 0$. Le second prouve la continuité à gauche en tout $t > 0$.

Pour la dérivée à droite, l'égalité exacte de (a) donne :

$$\frac{g_i(t+h) - g_i(t)}{h} = -[a + \varepsilon(h)]g_i(t) \rightarrow -ag_i(t).$$

Ainsi $g'_{i,+}(t) = -ag_i(t)$ pour $t \geq 0$.

À gauche, pour $t > 0$ et $0 < h \leq t$:

$$\frac{g_i(t) - g_i(t-h)}{h} = -[a + \varepsilon(h)]g_i(t-h).$$

La continuité à gauche établie auparavant donne $g_i(t-h) \rightarrow g_i(t)$, d'où $g'_{i,-}(t) = -ag_i(t)$.

Les deux dérivées unilatérales existent et ont la même valeur en tout $t > 0$.

(c) Expression de la probabilité de survie

Les résultats précédents donnent :

$$g'_i(t) = -ag_i(t).$$

La méthode imposée consiste à multiplier par une exponentielle. Posons $u_i(t) = e^{at}g_i(t)$.

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec :

$$u_i'(t) = ae^{at}g_i(t) + e^{at}g_i'(t) = 0.$$

Le théorème des accroissements finis, appliqué sur tout segment de $\mathbb{R}_+$, montre que u_i est constante. Comme $X_i \geq 0$ presque sûrement, $g_i(0) = 1$, donc $u_i(0) = 1$.

Ainsi, pour tout $t \geq 0$ et tout $1 \leq i \leq m$:

$$\boxed{g_i(t) = e^{-at}}.$$

(d) Fonction de répartition, densité, loi et espérance

Il faut d'abord distinguer $P(X_i \geq t)$ de $P(X_i > t)$. Pour $t \geq 0$, les événements $\{X_i \geq t + 1/n\}$ croissent vers $\{X_i > t\}$. Par continuité monotone des probabilités :

$$P(X_i > t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_i(t + 1/n) = e^{-at} = P(X_i \geq t).$$

Ainsi $P(X_i = t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, y compris $t = 0$. Comme $X_i \geq 0$, sa fonction de répartition est :

$$\boxed{F_i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-at}, & t \geq 0. \end{cases}}$$

Une densité est :

$$\boxed{f_i(t) = \begin{cases} ae^{-at}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}}$$

Elle est positive et continue sauf éventuellement en 0. Elle est normalisée, puisque

$\int_0^{+\infty} ae^{-at} dt = 1$, et son intégrale jusqu'à t donne bien $F_i(t)$. Les variables X_i suivent donc toutes la loi exponentielle de paramètre a .

L'espérance se calcule par transfert. Pour $A > 0$, une intégration par parties sur le

segment $[0, A]$ donne :

$$\int_0^A t a e^{-at} dt = [-t e^{-at}]_0^A + \int_0^A e^{-at} dt = -A e^{-aA} + \frac{1 - e^{-aA}}{a}.$$

Les croissances comparées donnent $A e^{-aA} \rightarrow 0$. L'intégrale impropre du terme positif converge, ce qui justifie l'existence de l'espérance :

$$E(X_i) = \frac{1}{a}.$$

Le nombre a est l'inverse de la durée moyenne de marche. Il représente aussi le taux instantané de panne conditionnel à la survie :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(X_i < t + h \mid X_i \geq t)}{h} = a.$$

Ce taux est constant dans le temps. À titre de contrôle, la loi obtenue donne $q(h) = 1 - e^{-ah}$ et donc $\varepsilon(h) = (1 - e^{-ah})/h - a \rightarrow 0$; elle satisfait bien (H1).

2. Étude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$

On fixe $t \geq 0$ et l'on pose $b(t) = 1 - e^{-at}$. Pour chaque machine, $P(X_i < t) = b(t)$.

Méthode 1 — Somme d'indicateurs indépendantes

Posons $I_i(t) = \mathbf{1}_{\{X_i < t\}}$. Chaque $I_i(t)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $b(t)$. Les indicateurs sont mutuellement indépendantes, car chacune dépend d'une seule des durées indépendantes X_i .

Comme

$$N(t) = \sum_{i=1}^m I_i(t),$$

la stabilité par somme des Bernoulli indépendantes de même paramètre donne :

$$N(t) \sim \mathcal{B}(m, 1 - e^{-at}).$$

Pour $t > 0$ et $0 \leq k \leq m$:

$$p_k(t) = \binom{m}{k} (1 - e^{-at})^k e^{-at(m-k)}.$$

À $t = 0$, $N(0) = 0$ presque sûrement, donc $p_0(0) = 1$ et $p_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$. Cette formulation évite toute ambiguïté sur une puissance de base nulle et d'exposant nul.

Les indicatrices étant bornées, leurs espérances existent. La linéarité donne :

$$E(N(t)) = \sum_{i=1}^m E(I_i(t)) = m(1 - e^{-at}).$$

Méthode 2 — Choix des machines en panne

Pour un sous-ensemble fixé A de $\{1, \dots, m\}$ de cardinal k , l'événement « exactement les machines de A sont en panne » est :

$$\bigcap_{i \in A} \{X_i < t\} \cap \bigcap_{i \notin A} \{X_i \geq t\}.$$

Par indépendance, pour $t > 0$, sa probabilité vaut $b(t)^k [1 - b(t)]^{m-k}$. Il y a $\binom{m}{k}$ choix de A , et les événements correspondants sont disjoints. Leur réunion est $\{N(t) = k\}$. On retrouve donc la formule de $p_k(t)$, puis la loi binomiale. À $t = 0$, aucun ensemble non vide de machines en panne n'est possible.

On peut aussi calculer l'espérance directement à partir de cette loi finie. Pour $t > 0$, l'identité $k \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k-1}$ donne :

$$E(N(t)) = mb(t) \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} b(t)^j [1 - b(t)]^{m-1-j} = mb(t),$$

par le binôme de Newton. Pour $t = 0$, cette espérance est nulle. La première méthode reconnaît une somme de Bernoulli ; la seconde explique le coefficient binomial par le dénombrement des configurations.

Enfin, lorsque $t \rightarrow +\infty$, $e^{-at} \rightarrow 0$ et $1 - e^{-at} \rightarrow 1$. Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_k(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

Ce comportement était prévisible : chaque durée de marche est finie presque sûrement et aucune machine n'est réparée. Plus quantitativement, la probabilité qu'au moins une machine fonctionne encore est majorée par

$$\sum_{i=1}^m P(X_i \geq t) = me^{-at},$$

qui tend vers 0.

Partie 2

Cette partie ne reprend aucun résultat de la partie 1. On utilise seulement (H1), (H2) et les conditions initiales.

1. Étude des probabilités conditionnelles $P(N(t+h) = k \mid N(t) = i)$

Question adaptée au programme actuel : on ne conditionne que par des événements de probabilité strictement positive. En particulier, à $t = 0$, seul $N(0) = 0$ peut servir de conditionnement.

Justifions aussi que tous les conditionnements sont définis pour $t > 0$, sans déterminer la loi des durées. Puisque $q(s)/s \rightarrow a > 0$, $q(s) > 0$ pour tout $s > 0$ assez petit. Pour un $t > 0$ fixé, choisissons un tel $s < t$. L'hypothèse (H1) au temps 0 donne $P(X_j < s) = q(s) > 0$, donc $P(X_j < t) > 0$. D'autre part, $P(X_j \geq t) > 0$ puisque (H1) est définie à cet instant. L'indépendance implique que toute configuration de machines

en panne et en marche à t a une probabilité strictement positive. Ainsi $p_i(t) > 0$ pour $0 \leq i \leq m$.

Fixons maintenant une configuration A des i machines déjà en panne et notons E_A l'événement correspondant. Pour chaque $j \notin A$, la panne supplémentaire entre t et $t + h$ est l'événement $\{t \leq X_j < t + h\}$, conditionnellement à $X_j \geq t$, de probabilité $q(h)$ par (H1).

L'indépendance conditionnelle dans cette configuration doit être justifiée. Pour n'importe quel choix de nouvelles pannes parmi les machines hors de A , le numérateur $P(E_A \cap \text{ce choix})$ et le dénominateur $P(E_A)$ se factorisent par (H2). Leur quotient est le produit des probabilités conditionnelles individuelles : chaque nouvelle panne apporte un facteur $q(h)$ et chaque survie un facteur $1 - q(h)$. Les machines encore en marche ont donc des indicatrices de panne supplémentaire indépendantes, de même paramètre $q(h)$, une fois E_A fixé.

Il y a $m - i$ machines encore en marche. Pour $i \leq k \leq m$, choisir les $k - i$ nouvelles pannes donne :

$$P(N(t + h) = k \mid E_A) = \binom{m-i}{k-i} q(h)^{k-i} [1 - q(h)]^{m-k}.$$

Cette expression ne dépend pas de A , mais seulement de son cardinal i . En sommant sur les configurations conditionnellement à $N(t) = i$, on obtient donc la même expression. On la note $T_{ki}(h)$. Pour $k < i$, on posera $T_{ki}(h) = 0$. Les facteurs d'exposant nul sont des produits vides de valeur 1.

(a) Impossibilité d'une diminution du nombre de pannes

Pour chaque réalisation, $\{X_j < t\} \subset \{X_j < t + h\}$, donc $N(t + h) \geq N(t)$. Si $k < i$, l'intersection $\{N(t + h) = k\} \cap \{N(t) = i\}$ est vide.

Ainsi, lorsque le conditionnement est défini :

$$\boxed{P(N(t + h) = k \mid N(t) = i) = 0 \quad \text{si } k < i.}$$

(b) Aucune panne supplémentaire

Pour conserver exactement k pannes, chacune des $m - k$ machines encore en marche doit survivre jusqu'à $t + h$. La formule précédente donne :

$$T_{kk}(h) = [1 - q(h)]^{m-k} = (1 - ah - h\varepsilon(h))^{m-k}.$$

Comme $q(h) = ah + o(h)$ et $q(h) = O(h)$, le développement polynomial à l'ordre 1 donne, pour $m - k \geq 1$:

$$[1 - q(h)]^{m-k} = 1 - (m - k)q(h) + O(q(h)^2) = 1 - (m - k)ah + o(h).$$

Pour $k = m$, l'expression est exactement 1, ce qui donne le même résultat avec un reste nul. Ainsi :

$$T_{kk}(h) = 1 - (m - k)ah + h\varepsilon'_k(h), \quad \varepsilon'_k(h) \rightarrow 0.$$

La notation $O(h)$ signifie une quantité dont la valeur absolue est majorée par une constante fois h pour $h > 0$ assez petit. Ici le développement peut aussi se lire directement dans le binôme fini : tous les termes de degré au moins deux en $q(h)$ sont majorés par une constante fois h^2 .

(c) Une seule panne supplémentaire

Conditionnellement à $N(t) = k - 1$, il reste $m - k + 1$ machines. Il faut choisir celle qui tombe en panne, puis imposer la survie des $m - k$ autres. Donc :

$$T_{k,k-1}(h) = (m - k + 1)q(h)[1 - q(h)]^{m-k}.$$

Puisque $q(h)/h \rightarrow a$ et $[1 - q(h)]^{m-k} \rightarrow 1$, on a :

$$\frac{T_{k,k-1}(h)}{h} \rightarrow (m - k + 1)a.$$

On peut donc écrire :

$$T_{k,k-1}(h) = (m - k + 1)ah + h\varepsilon''_k(h), \quad \varepsilon''_k(h) \rightarrow 0.$$

Le cas $k = m$ est inclus : une seule machine reste en marche et la probabilité est alors exactement $q(h)$.

(d) Au moins deux pannes supplémentaires

On suppose $k \geq i + 2$ et l'on pose $r = k - i \geq 2$.

Méthode 1 — Formule exacte de transition

La formule obtenue en introduction donne :

$$0 \leq T_{ki}(h) = \binom{m-i}{r} q(h)^r [1 - q(h)]^{m-k} \leq \binom{m-i}{r} q(h)^r.$$

Comme $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que $0 \leq q(h) \leq Ch$ pour $0 < h < h_0$.

Ainsi :

$$0 \leq \frac{T_{ki}(h)}{h} \leq \binom{m-i}{r} C^r h^{r-1} \rightarrow 0.$$

Donc $T_{ki}(h) = o(h)$.

Méthode 2 — Majoration par les paires de pannes

Dans une configuration à i pannes, l'événement « au moins deux nouvelles pannes » est contenu dans la réunion des événements « ces deux machines encore en marche tombent toutes deux en panne ». Il y a $\binom{m-i}{2}$ paires. Pour chaque paire, l'indépendance conditionnelle justifiée plus haut donne une probabilité $q(h)^2$.

L'inégalité de l'union donne donc :

$$0 \leq T_{ki}(h) \leq \binom{m-i}{2} q(h)^2.$$

Or $q(h)^2/h \leq C^2 h \rightarrow 0$. Cette majoration est valable après mélange des configurations, puisqu'elle ne dépend pas de leur identité. Ainsi $T_{ki}(h)/h \rightarrow 0$.

Les deux méthodes concluent :

$$T_{ki}(h) = h\varepsilon'''_{ki}(h), \quad \varepsilon'''_{ki}(h) \rightarrow 0 \quad \text{si } k \geq i + 2.$$

La première donne la probabilité exacte ; la seconde montre qu'une simple majoration des paires suffit pour obtenir la négligeabilité.

2. Étude des probabilités de panne $p_k(t)$

(a) Probabilités totales et différences

Les événements $\{N(t) = i\}$, $0 \leq i \leq m$, forment un système complet. Pour $t > 0$, tous ont une probabilité positive. Pour $t = 0$, seul le terme $i = 0$ subsiste. Les expressions $T_{ki}(h)$ restent définies algébriquement pour tous les indices et fournissent donc, dans les deux cas :

$$p_k(t+h) = \sum_{i=0}^k \binom{m-i}{k-i} q(h)^{k-i} [1-q(h)]^{m-k} p_i(t).$$

Pour justifier ensuite les limites à gauche, il faut contrôler le reste indépendamment de t . Posons $p_{-1}(t) = 0$. Pour chaque k , introduisons les fonctions de reste :

$$r_{kk}(h) = \frac{T_{kk}(h) - 1 + (m-k)ah}{h},$$

$$r_{k,k-1}(h) = \frac{T_{k,k-1}(h) - (m-k+1)ah}{h} \quad \text{si } k \geq 1,$$

$$r_{ki}(h) = \frac{T_{ki}(h)}{h} \quad \text{si } 0 \leq i \leq k-2.$$

Toutes tendent vers 0 lorsque $h \rightarrow 0^+$. Définissons

$$\rho_k(t, h) = \sum_{i=0}^k p_i(t) r_{ki}(h),$$

avec uniquement les termes existants. Alors, puisque $0 \leq p_i(t) \leq 1$:

$$|\rho_k(t, h)| \leq \sum_{i=0}^k |r_{ki}(h)| =: \eta_k(h) \longrightarrow 0.$$

Cette majoration est indépendante de t . Les développements de la question 1 donnent donc :

$$p_k(t+h) - p_k(t) = ah[(m-k+1)p_{k-1}(t) - (m-k)p_k(t)] + h\rho_k(t, h).$$

Pour $t > 0$ et $0 < h \leq t$, l'application de cette formule au temps $t-h$ donne :

$$p_k(t) - p_k(t-h) = ah[(m-k+1)p_{k-1}(t-h) - (m-k)p_k(t-h)] + h\rho_k(t-h, h).$$

La même borne $\eta_k(h)$ contrôle le reste dans cette dernière égalité.

(b) Continuité et dérivées unilatérales

Tous les p_j sont compris entre 0 et 1. La première différence de (a) donne, pour chaque k :

$$|p_k(t+h) - p_k(t)| \leq h\{a[(m-k+1) + (m-k)] + \eta_k(h)\}.$$

Le membre de droite tend vers 0, ce qui établit la continuité à droite sur $[0, +\infty[$. La formule au temps $t-h$ donne la même majoration de $|p_k(t) - p_k(t-h)|$ et prouve la continuité à gauche sur $]0, +\infty[$. Cette argumentation s'applique à tous les indices avant de calculer les dérivées.

En divisant la première différence par h et en utilisant $\rho_k(t, h) \rightarrow 0$, on obtient :

$$p'_{k,+}(t) = a[(m-k+1)p_{k-1}(t) - (m-k)p_k(t)].$$

À gauche, pour $t > 0$, on divise la seconde différence par h . La continuité à gauche de p_{k-1} et p_k , ainsi que $|\rho_k(t-h, h)| \leq \eta_k(h) \rightarrow 0$, donnent :

$$p'_{k,-}(t) = a[(m - k + 1)p_{k-1}(t) - (m - k)p_k(t)].$$

Les deux dérivées unilatérales coïncident en tout $t > 0$. Le cas $k = 0$ utilise $p_{-1} = 0$; le cas $k = m$ ne contient aucun terme de sortie, puisque toutes les machines sont déjà en panne.

(c) Équations différentielles et relation (R)

On vient d'établir, pour $0 \leq k \leq m$:

$$p'_k(t) = a(m - k + 1)p_{k-1}(t) - a(m - k)p_k(t).$$

En particulier, $p'_0(t) = -amp_0(t)$ et $p'_m(t) = ap_{m-1}(t)$. Les seconds membres sont continus, puisque les p_j le sont.

La fonction génératrice est une somme finie ; sa dérivation terme à terme ne nécessite donc aucun théorème d'échange avec une somme infinie. On écrit :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = a \sum_{k=1}^m (m - k + 1)p_{k-1}(t)x^k - a \sum_{k=0}^m (m - k)p_k(t)x^k.$$

Dans la première somme, le changement d'indice $j = k - 1$ donne :

$$\sum_{k=1}^m (m - k + 1)p_{k-1}(t)x^k = x \sum_{j=0}^{m-1} (m - j)p_j(t)x^j.$$

Le terme $j = m$ étant nul, on peut l'ajouter. D'autre part :

$$\sum_{j=0}^m (m - j)p_j(t)x^j = mG(x, t) - x \frac{\partial G}{\partial x}(x, t).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = a(x - 1) \left[mG(x, t) - x \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \right].$$

On retrouve bien :

$$\boxed{\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = ma(x-1)G(x, t) - ax(x-1)\frac{\partial G}{\partial x}(x, t)} \quad (\text{R}).$$

3. Étude d'un endomorphisme auxiliaire

(a) Linéarité et stabilité de l'espace

La dérivation et la multiplication par un polynôme fixé sont linéaires. Pour $U, V \in \mathbb{R}_m[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la définition donne donc $f(\alpha U + \beta V) = \alpha f(U) + \beta f(V)$.

Il reste à vérifier que $f(U)$ a un degré au plus m , car la formule contient a priori des termes de degré $m+1$.

Méthode 1 — Annulation du coefficient dominant

Écrivons $f(U) = a(X-1)(mU - XU')$. Si U est non nul de degré $d < m$, alors $mU - XU'$ est de degré au plus d , donc $f(U)$ est de degré au plus $d+1 \leq m$.

Si $d = m$ et si c est le coefficient de X^m dans U , le coefficient de X^m dans $mU - XU'$ vaut $mc - mc = 0$. Ce polynôme est donc de degré au plus $m-1$ et $f(U)$ de degré au plus m . Enfin, $f(0) = 0$.

Méthode 2 — Images des monômes de la base canonique

Pour $0 \leq j \leq m$, on calcule directement :

$$f(X^j) = a(m-j)(X^{j+1} - X^j).$$

Pour $j < m$, le degré est au plus m . Pour $j = m$, l'image est nulle. Ainsi toutes les images des monômes de la base canonique appartiennent à $\mathbb{R}_m[X]$. Par linéarité, il en est de même de l'image de tout polynôme de cet espace.

Les deux méthodes prouvent :

$$f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_m[X].$$

La première repère l'annulation qui empêche le degré d'augmenter ; la seconde fournit les images utiles pour une représentation matricielle.

(b) Détermination d'un polynôme propre unitaire

Soit P un polynôme propre unitaire associé à une valeur propre réelle λ . En évaluant $f(P) = \lambda P$ en 1 et en 0, on obtient :

$$0 = \lambda P(1), \quad -maP(0) = \lambda P(0).$$

Si $P(0)$ et $P(1)$ étaient tous deux non nuls, la première égalité imposerait $\lambda = 0$ et la seconde $\lambda = -ma$, ce qui est impossible car $m \geq 1$ et $a > 0$. Ainsi 0 ou 1 est racine de P .

Soient h et k les multiplicités de ces racines, en autorisant la multiplicité nulle lorsque le nombre considéré n'est pas racine. On peut écrire :

$$P(X) = X^h(X-1)^k R(X), \quad R(0) \neq 0, \quad R(1) \neq 0, \quad 1 \leq h+k \leq m.$$

Pour $x \neq 0, 1$, la dérivation du produit donne, après division par $x^h(x-1)^k$:

$$\frac{P'(x)}{x^h(x-1)^k} = \left(\frac{h}{x} + \frac{k}{x-1} \right) R(x) + R'(x).$$

L'équation propre devient donc :

$$a[(m-h)(x-1) - kx]R(x) - ax(x-1)R'(x) = \lambda R(x).$$

Cette égalité obtenue hors de $\{0, 1\}$ se prolonge en ces deux points par continuité, tous ses termes étant polynomiaux. En faisant tendre x vers 0, on obtient

$$-a(m-h)R(0) = \lambda R(0), \text{ donc } \lambda = -a(m-h). \text{ En faisant tendre } x \text{ vers } 1, \text{ on obtient } -akR(1) = \lambda R(1), \text{ donc } \lambda = -ak.$$

Comme $a > 0$, ces égalités impliquent $h = m - k$. Alors $h + k = m$ et le degré de P est au plus m ; nécessairement R est constant. Puisque P est unitaire, cette constante vaut 1.

En conclusion :

$$\boxed{h = m - k, \quad \lambda = -ak, \quad P(X) = X^{m-k}(X - 1)^k},$$

avec $0 \leq k \leq m$. Le raisonnement inclut les cas $k = 0$, où $P = X^m$, et $k = m$, où $P = (X - 1)^m$.

(c) Images des W_k , spectre et diagonalisation

Pour $0 \leq k \leq m$, on considère $W_k(X) = X^{m-k}(X - 1)^k$. Pour $x \neq 0, 1$, la dérivation donne :

$$\frac{W'_k(x)}{W_k(x)} = \frac{m-k}{x} + \frac{k}{x-1}.$$

Ainsi :

$$f(W_k)(x) = a(x-1)W_k(x) \left[m - (m-k) - \frac{kx}{x-1} \right] = -akW_k(x).$$

L'égalité se prolonge à $x = 0$ et $x = 1$, car les deux membres sont des polynômes. On a donc l'expression factorisée :

$$\boxed{f(W_k) = -akX^{m-k}(X - 1)^k = -akW_k}.$$

Chaque W_k est non nul. Les $m + 1$ nombres $-ak$, $0 \leq k \leq m$, sont distincts puisque $a > 0$. Ils sont donc tous des valeurs propres. Inversement, (b) montre que toute valeur propre est l'un de ces nombres.

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{0, -a, -2a, \dots, -ma\}}.$$

L'espace $\mathbb{R}_m[X]$ est de dimension $m + 1$. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants ; les $m + 1$ polynômes W_k forment donc une base de vecteurs propres. Par conséquent f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Sa matrice dans cette base est $\text{diag}(0, -a, \dots, -ma)$.

(d) Base et coordonnées du polynôme constant

Méthode 1 — Indépendance des vecteurs propres

D'après (c), $W_0, \dots, W_m$ sont $m + 1$ vecteurs propres associés à $m + 1$ valeurs propres distinctes. Ils sont donc libres et, comme la dimension de l'espace est $m + 1$, forment une base.

Méthode 2 — Ordres d'annulation en zéro

Supposons

$$\sum_{k=0}^m c_k W_k = 0$$

et qu'au moins un c_k soit non nul. Soit j le plus grand indice tel que $c_j \neq 0$. Pour $k < j$, le polynôme W_k est divisible par X^{m-j+1} . Le coefficient de X^{m-j} dans $W_j = X^{m-j}(X-1)^j$ est $(-1)^j$.

Le coefficient de X^{m-j} dans la somme serait donc $c_j(-1)^j \neq 0$, contrairement au fait que cette somme est le polynôme nul. Tous les coefficients c_k sont donc nuls : la famille est libre et constitue une base.

Cette seconde méthode établit la propriété de base directement par les coefficients, sans utiliser la diagonalisation.

Pour calculer les coordonnées de 1, on applique le binôme de Newton à l'identité demandée :

$$1 = [X - (X - 1)]^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} X^{m-k} [-(X - 1)]^k = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} W_k(X).$$

L'unicité des coordonnées dans une base donne donc :

$$[1]_{(W_0, \dots, W_m)} = \begin{pmatrix} \binom{m}{0} \\ -\binom{m}{1} \\ \vdots \\ (-1)^m \binom{m}{m} \end{pmatrix}.$$

4. Étude de la loi de la variable aléatoire $N(t)$

(a) Relation entre les coordonnées et dérivabilité

Question adaptée au programme actuel : le sens de la matrice de changement de coordonnées est explicité par ses colonnes, afin d'éviter l'ambiguïté de la formule « matrice de passage de ... à ... ».

Posons $p(t) = {}^t(p_0(t), \dots, p_m(t))$ et $q(t) = {}^t(q_0(t), \dots, q_m(t))$. La colonne d'indice k de Π contient les coordonnées de W_k dans la base canonique ; la décomposition

$$G = \sum_{k=0}^m q_k W_k$$

donne donc :

$$p(t) = \Pi q(t).$$

Les deux familles étant des bases, Π est inversible. En effet, si $\Pi c = 0$, le polynôme

$$\sum c_k W_k$$

est nul, donc $c = 0$ par liberté des W_k ; la matrice carrée a un noyau nul et est inversible par le théorème du rang.

On obtient $q(t) = \Pi^{-1}p(t)$. La matrice Π^{-1} est constante : chaque $q_k(t)$ est une

combinaison linéaire finie des fonctions $p_j(t)$, dérivables d'après 2(c). Par conséquent, toutes les fonctions q_k sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, avec la convention à droite en 0.

(b) Équations différentielles des coordonnées propres

La relation (R) signifie, à t fixé, que le polynôme $\partial G / \partial t$ est $f(G)$. La somme

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^m q_k(t) W_k(x)$$

est finie et les W_k ne dépendent pas de t . Ainsi :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=0}^m q'_k(t) W_k(x).$$

Par linéarité de f et d'après 3(c) :

$$f(G)(x) = \sum_{k=0}^m q_k(t) f(W_k)(x) = \sum_{k=0}^m (-ak) q_k(t) W_k(x).$$

Puisque les W_k forment une base, les deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales. Donc (R) équivaut exactement à :

$$\boxed{q'_k(t) = -akq_k(t) \quad (0 \leq k \leq m)}.$$

Pour chaque k , posons $v_k(t) = e^{akt} q_k(t)$. La dérivation d'un produit donne :

$$v'_k(t) = e^{akt} [akq_k(t) + q'_k(t)] = 0.$$

La fonction v_k est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. Les accroissements finis montrent qu'elle est constante sur chaque segment, donc sur $\mathbb{R}_+$. Il existe une constante réelle C_k , égale à $q_k(0)$, telle que :

$$\boxed{q_k(t) = C_k e^{-akt}}.$$

Pour $k = 0$, cette formule dit simplement que q_0 est constante.

(c) Conditions initiales et expression de G

Comme $p_0(0) = 1$ et que les probabilités $p_k(0)$ ont pour somme 1, toutes les autres valent 0. Il s'ensuit :

$$G(x, 0) = \sum_{k=0}^m p_k(0) x^k = 1.$$

D'autre part, $q_k(0) = C_k$, donc :

$$\sum_{k=0}^m C_k W_k(X) = 1.$$

En comparant avec la décomposition obtenue en 3(d), et en utilisant l'unicité des coordonnées dans la base des W_k , on obtient :

$$C_k = (-1)^k \binom{m}{k} \quad (0 \leq k \leq m).$$

Ainsi :

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} [-e^{-at}(x-1)]^k.$$

Le binôme de Newton donne :

$$G(x, t) = [x - e^{-at}(x-1)]^m.$$

En regroupant les termes en x :

$$G(x, t) = [(1 - e^{-at})x + e^{-at}]^m.$$

Cette expression satisfait bien $G(x, 0) = 1$ et $G(1, t) = 1$.

(d) Probabilités, loi et espérance

Le développement demandé est :

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (1 - e^{-at})^k e^{-at(m-k)} x^k.$$

Les coefficients de G dans la base canonique étant précisément les $p_k(t)$, on obtient, pour $t > 0$:

$$p_k(t) = \binom{m}{k} (1 - e^{-at})^k e^{-at(m-k)}, \quad 0 \leq k \leq m.$$

À $t = 0$, $p_0(0) = 1$ et $p_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$. On a donc, y compris la loi dégénérée au temps initial :

$$N(t) \sim \mathcal{B}(m, 1 - e^{-at}).$$

L'espérance existe puisque $0 \leq N(t) \leq m$.

Méthode 1 — Moment de la loi binomiale

La loi identifiée est une binomiale de paramètres m et $1 - e^{-at}$. La formule d'espérance de cette loi du programme donne :

$$E(N(t)) = m(1 - e^{-at}).$$

Méthode 2 — Dérivée du polynôme générateur

Sans supposer connu un résultat général sur les fonctions génératrices, on dérive simplement la somme finie :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(1, t) = \sum_{k=1}^m k p_k(t) = E(N(t)).$$

En dérivant l'expression obtenue en (c), on a :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = m(1 - e^{-at})[(1 - e^{-at})x + e^{-at}]^{m-1}.$$

À $x = 1$, le facteur entre crochets vaut 1. Ainsi $E(N(t)) = m(1 - e^{-at})$. Cette méthode permet de lire un moment directement à partir du polynôme générateur, sans reprendre le calcul des coefficients.

Relevé des adaptations

- Préambule et partie 1, question 1 : explicitation de la convention

$$N(t) = \sum \mathbf{1}_{\{X_i < t\}},$$

cohérente avec la survie $X_i \geq t$ et les intervalles $[t, t + h[$ de l'original ; précision que les probabilités conditionnelles de (H1) sont définies et que la dérivée en 0 est une dérivée à droite. Ces précisions lèvent les ambiguïtés de bord sans modifier le modèle ni la loi obtenue.

- Partie 2, question 1, introduction et sous-questions (a) à (d), puis question 2(a) : restriction des probabilités conditionnelles aux événements de probabilité positive. À $t = 0$, l'original propose aussi des conditionnements par $N(0) = i$ avec $i > 0$, qui sont de probabilité nulle. Le sujet précise que seules les expressions algébriques de transition peuvent être prolongées à ces indices, afin d'écrire les probabilités totales avec leurs coefficients nuls.
- Partie 2, question 1(b) à (d) : précision que les primes sur les fonctions de reste sont des étiquettes et que ces restes peuvent dépendre des indices fixés, afin de ne pas les confondre avec des dérivées ou de leur imposer une uniformité injustifiée entre indices.
- Partie 2, question 4(a) : définition de Π par les coordonnées de ses colonnes dans la base canonique, afin de fixer sans ambiguïté le sens du changement de coordonnées.

Aucune question n'a été supprimée ni remplacée par un résultat admis. Aucun changement de méthode imposé par une exclusion du programme n'est nécessaire.