



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1996

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

On considère dans cette partie une suite $(p_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels positifs ou nuls telle que la série

$$\sum_{n \geq 0} p_n$$

converge. On définit, pour $0 \leq t \leq 1$, la fonction génératrice F de cette suite par

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j.$$

On adopte la convention $t^0 = 1$, y compris pour $t = 0$. À l'extrémité 1, être dérivable signifie avoir une dérivée à gauche finie, notée $F'(1)$.

1. Étude de la fonction F sur $[0, 1]$.

1. a) Montrer que la série définissant $F(t)$ est convergente pour $0 \leq t \leq 1$.

1. b) Montrer que F est une fonction croissante sur $[0, 1]$. En déduire que F admet une limite à droite en tout point de $[0, 1[$ et une limite à gauche en tout point de $]0, 1]$. On précisera le théorème utilisé.

1. c) Soit $t_0 \in [0, 1[$. Établir, pour tout réel t tel que $t_0 < t \leq 1$ et tout entier naturel n ,

$$0 \leq F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=0}^n p_j (t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

En déduire, pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

En déduire enfin la continuité à droite de F en t_0 .

1. d) Soit $t_0 \in]0, 1]$. En admettant que l'on établit de façon analogue la continuité à gauche de F en t_0 , en conclure que F est continue sur $[0, 1]$.

2. Étude locale de la fonction F en 0.

2. a) Pour tout entier naturel n , établir que, pour tout réel $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

2. b) On considère la fonction ε_n définie sur $]0, 1]$ par l'égalité

$$F(t) = p_0 + p_1 t + \cdots + p_n t^n + t^n \varepsilon_n(t).$$

Déduire de l'inégalité précédente que ε_n est de limite nulle en 0.

Ainsi, F admet un développement limité à l'ordre n en 0, qui permet d'obtenir $p_0, \dots, p_n$.

3. Étude locale de la fonction F en 1.

3. a) Établir, pour tout réel $t \in [0, 1[$,

$$\frac{F(t) - F(1)}{t - 1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + t + \cdots + t^{j-1}).$$

En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{F(t) - F(1)}{t - 1}$ est croissante sur $[0, 1[$.

3. b) On suppose dans cette question que la série

$$\sum_{j \geq 1} jp_j$$

converge. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{F(t) - F(1)}{t - 1}$ est alors majorée sur $[0, 1[$, puis en déduire que F est dérivable en 1 et que

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j.$$

3. c) On suppose dans cette question que F est dérivable en 1. Montrer, pour tout réel $t \in [0, 1[$ et tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^n p_j(1 + t + \dots + t^{j-1}) \leq \frac{F(t) - F(1)}{t - 1}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$p_1 + 2p_2 + \dots + np_n \leq F'(1),$$

puis établir que la série

$$\sum_{j \geq 1} jp_j$$

converge et comparer sa somme à $F'(1)$.

3. d) Dédurre de ces résultats que F est dérivable en 1 si et seulement si la série

$$\sum_{j \geq 1} j p_j$$

converge, et que sa somme est alors égale à $F'(1)$.

3. e) Application : pour tout entier naturel n , on suppose que p_n est la probabilité pour qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ prenne la valeur n . À quelle condition nécessaire et suffisante sur F la variable X admet-elle une espérance mathématique ? Comparer alors celle-ci à $F'(1)$.

4. Produit de deux fonctions génératrices.

Soient deux suites $(p_n)_{n \geq 0}$, $(q_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels positifs ou nuls telles que les séries

$$\sum_{n \geq 0} p_n$$

et

$$\sum_{n \geq 0} q_n$$

convergent. Pour tout entier naturel n , on pose

$$r_n = p_0 q_n + \cdots + p_i q_{n-i} + \cdots + p_n q_0 = \sum_{i=0}^n p_i q_{n-i}.$$

4. a) Établir, pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{j=0}^n r_j \leq \left(\sum_{j=0}^n p_j \right) \left(\sum_{j=0}^n q_j \right).$$

En déduire la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} r_n.$$

4. b) Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on pose

$$F(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j t^j, \quad G(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j t^j, \quad H(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} r_j t^j.$$

Prouver que, pour tout réel $t \in [0, 1]$ et tout entier naturel n ,

$$\sum_{j=0}^n r_j t^j \leq \left(\sum_{j=0}^n p_j t^j \right) \left(\sum_{j=0}^n q_j t^j \right) \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j.$$

En déduire l'égalité $F(t)G(t) = H(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

Partie II

Dans toute cette partie, on considère une pièce dont la probabilité de donner Face est égale à p , avec $0 < p < 1$. Les jets successifs sont indépendants, avec cette même probabilité de Face.

On propose le jeu suivant à un individu muni d'un capital initial de K francs, où K est un entier naturel non nul.

Il lance la pièce :

- Si elle donne Face, il gagne 1 franc et son capital devient $K + 1$ francs.
- Si elle donne Pile, il perd 1 franc et son capital devient $K - 1$ francs.

À l'issue de ce jet, si son capital est nul, il est déclaré ruiné et le jeu cesse définitivement. Sinon, il recommence, muni de son nouveau capital, la même expérience aléatoire et dans les mêmes conditions. Il poursuit ainsi tant qu'il n'est pas ruiné.

On désigne par :

- R_K l'événement « le joueur, muni d'un capital initial de K francs, est ruiné à l'issue de l'un des jets de la pièce ».
- $p_n(K)$ la probabilité que ce joueur soit ruiné pour la première fois à l'issue du n -ième jet. Par convention, $p_0(K) = 0$.
- F_K la fonction génératrice de la suite $(p_n(K))_{n \geq 0}$, définie pour $0 \leq t \leq 1$ par

$$F_K(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(K)t^n.$$

On vérifiera que $P(R_K)$ est égale à la somme de la série

$$\sum_{n \geq 0} p_n(K),$$

qui est donc convergente, et que $P(R_K) = F_K(1)$.

II.1. Étude du cas particulier $K = 1$

Dans cette partie, on étudie le jeu en supposant le capital initial égal à 1 franc.

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur.

1. a) Calculer $p_1(1)$, $p_2(1)$ et $p_3(1)$.

1. b) Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que la ruine du joueur intervient à l'issue du $(n+1)$ -ième jet si et seulement s'il existe un entier j , avec $1 \leq j \leq n-1$, tel que :

- À l'issue du premier jet, le capital du joueur est égal à 2 francs.
- À l'issue des j jets suivants, le capital revient, pour la première fois après le premier jet, à 1 franc.
- À l'issue des $n - j$ jets suivants, le capital arrive pour la première fois à 0 franc ; le joueur est alors ruiné.

Exprimer en fonction de p et des éléments de la suite $(p_n(1))$ les probabilités des trois étapes, les deux dernières étant considérées conditionnellement aux étapes précédentes, puis établir la formule suivante, où l'on rappelle que $p_0(1) = 0$:

$$p \sum_{j=0}^n p_j(1) p_{n-j}(1) = \begin{cases} p_{n+1}(1) & \text{si } n \geq 2, \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

1. c) En multipliant par t^{n+1} l'égalité précédente, puis en la sommant pour $n \geq 0$, établir, à l'aide des résultats de I.4, la relation

$$pt[F_1(t)]^2 = F_1(t) - (1-p)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

1. d) Étudier les variations de la fonction $t \mapsto 1 - 4p(1-p)t^2$ sur $]0, 1[$ et montrer que

$$1 - 4p(1-p)t^2 > (1-2p)^2 \quad (0 < t < 1).$$

En déduire que, pour $0 < t < 1$, l'équation du second degré

$$ptx^2 - x + (1-p)t = 0$$

possède deux racines réelles distinctes $x'(t)$ et $x''(t)$, avec $x'(t) < x''(t)$.

Pour tout $t \in]0, 1[$, montrer que $x''(t) > 1$ puis, en remarquant que $F_1(t) \leq 1$, en déduire $F_1(t)$ en fonction de p et t pour $0 < t < 1$.

1. e) En faisant tendre t vers 1, déterminer $F_1(1)$ et en déduire $P(R_1)$, en distinguant les cas $p \leq \frac{1}{2}$ et $p > \frac{1}{2}$.

2. Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq \frac{1}{2}$.

Pour $p < \frac{1}{2}$, déterminer, à l'aide de F_1 et des résultats de I.3, l'espérance de la variable aléatoire X_1 indiquant le numéro du jet à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = \frac{1}{2}$?

3. Expression des probabilités $p_n(1)$.

3. a) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0. En l'appliquant à $x = -4p(1-p)t^2$ et en majorant explicitement le reste, établir, pour tout entier $m \geq 0$, un développement limité à l'ordre $2m+1$ de F_1 en 0.

3. b) Déduire de I.2 que, pour tout entier naturel n , $p_{2n}(1) = 0$ et

$$p_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p^n (1-p)^{n+1}.$$

II.2. Étude du cas général

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur.

1. a) Le premier jet donne Face ou Pile, événements notés ici F_1 ou P_1 ; ces noms d'événements sont distincts de la notation $F_1(t)$ de la fonction génératrice. À l'aide du système complet d'événements $\{F_1, P_1\}$, établir, pour $n \geq 2$,

$$p_n(1) = p p_{n-1}(2).$$

En multipliant par t^n cette égalité, puis en la sommant pour $n \geq 2$, établir

$$F_1(t) = ptF_2(t) + (1-p)t \quad (0 \leq t \leq 1),$$

puis en déduire $F_2(t) = [F_1(t)]^2$.

1. b) On suppose ici $K \geq 2$. En raisonnant de même, établir

$$p_n(K) = \begin{cases} p p_{n-1}(K+1) + (1-p)p_{n-1}(K-1) & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

En déduire l'expression de $F_K(t)$ en fonction de $p, t, F_{K+1}(t)$ et $F_{K-1}(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.
En étudiant alors la suite $K \mapsto u_K = F_K(t)$, exprimer $F_K(t)$ en fonction de p, K, t .

1. c) Déterminer $F_K(1)$ et en déduire $P(R_K)$, en distinguant les cas $p \leq \frac{1}{2}$ et $p > \frac{1}{2}$.

2. Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p < \frac{1}{2}$.

Pour $p < \frac{1}{2}$, déterminer, à l'aide de F_K et des résultats de I.3, l'espérance de la variable aléatoire X_K indiquant le numéro du jet à l'issue duquel le joueur est ruiné. Que se passe-t-il lorsque $p = \frac{1}{2}$?

3. Expression des probabilités $p_n(K)$.

3. a) À l'aide des résultats obtenus en II.2.1.a, établir que $p_{2n+1}(2) = 0$, puis préciser $p_{2n}(2)$ pour tout entier naturel n .

3. b) Déterminer $p_{2n}(3)$ et $p_{2n+1}(3)$, puis, plus généralement, $p_{2n}(K)$ et $p_{2n+1}(K)$ pour $K \geq 1$.