



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1996

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

On utilise la convention $t^0 = 1$ sur $[0, 1]$. Dans toute cette partie, $p_n \geq 0$, et la somme

$$M = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n$$

est finie. La notation $F'(1)$ désigne une dérivée à gauche finie.

1. Étude de la fonction F sur $[0, 1]$.

1. a) Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $j \geq 0$, on a $0 \leq p_j t^j \leq p_j$. La série

$$\sum p_j$$

étant convergente, le critère de comparaison des séries à termes positifs assure la convergence de

$$\sum p_j t^j.$$

On a aussi

$$0 \leq F(t) \leq M.$$

En particulier, $F(0) = p_0$ et $F(1) = M$.

1. b) Si $0 \leq s \leq t \leq 1$, alors $s^j \leq t^j$ pour chaque entier $j \geq 0$. La multiplication par $p_j \geq 0$ conserve l'ordre. En sommant jusqu'à un rang fini puis en passant à la limite,

$$F(s) \leq F(t).$$

Ainsi, F est croissante. Le théorème des limites des fonctions monotones assure l'existence d'une limite à droite en chaque point de $[0, 1[$ et d'une limite à gauche en chaque point de $]0, 1]$. Ces limites sont finies, car F est bornée entre 0 et M .

1. c) Fixons $n \geq 0$ et $t_0 < t \leq 1$. La linéarité des séries convergentes permet d'écrire

$$F(t) - F(t_0) = \sum_{j=0}^n p_j(t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j(t^j - t_0^j).$$

Tous les termes sont positifs ou nuls, et $0 \leq t^j - t_0^j \leq 1$. Donc

$$0 \leq F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=0}^n p_j(t^j - t_0^j) + \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

La limite à droite existe d'après I.1.b. Lorsque $t \rightarrow t_0^+$, la somme finie tend vers 0, car chaque monôme est continu. Il en résulte

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow t_0^+} F(t) - F(t_0) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

Cette inégalité vaut pour tout n . Le reste de la série convergente

$$\sum p_j$$

tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par encadrement, la différence de gauche est nulle :

$\lim_{t \rightarrow t_0^+} F(t) = F(t_0)$. La fonction est continue à droite en t_0 , y compris lorsque $t_0 = 0$.

Les deux passages à la limite sont successifs ; aucune limite n'est échangée avec une somme infinie.

1. d) Résultat admis dans cette version adaptée.

Comme dans le sujet original, on admet ici que, pour tout $t_0 \in]0, 1]$, F est continue à gauche en t_0 . Cela complète la continuité à droite établie en I.1.c : aux points intérieurs, les deux limites coïncident avec $F(t_0)$; en 0, seule la limite à droite est requise ; en 1, seule la limite à gauche est requise.

Ainsi, F est continue sur $[0, 1]$.

2. Étude locale de la fonction F en 0.

2. a) Pour $t \in [0, 1]$ et $j \geq n + 1$, on a $0 \leq t^j \leq t^{n+1}$. Les coefficients p_j sont positifs ou nuls. En sommant une inégalité finie puis en passant à la limite des séries convergentes,

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j \leq t^{n+1} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

Pour $t = 0$, les deux côtés sont nuls, car $n + 1 \geq 1$.

2. b) Pour $t > 0$, la définition de ε_n donne

$$\varepsilon_n(t) = \frac{1}{t^n} \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j t^j.$$

La division est permise puisque $t^n > 0$. La question précédente entraîne

$$0 \leq \varepsilon_n(t) \leq t \sum_{j=n+1}^{+\infty} p_j.$$

Le coefficient de t est fini et indépendant de t ; par encadrement, $\varepsilon_n(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$. Donc

$$F(t) = \sum_{j=0}^n p_j t^j + o(t^n).$$

Les coefficients de ce développement limité à droite sont exactement $p_0, \dots, p_n$. Leur identification ne suppose ni théorie générale des séries entières ni dérivation terme à terme.

3. Étude locale de la fonction F en 1.

3. a) Pour $t \in [0, 1[$, on a $1 - t > 0$. Pour chaque entier $j \geq 1$, l'identité géométrique finie donne

$$\frac{1 - t^j}{1 - t} = 1 + t + \dots + t^{j-1}.$$

Les séries définissant $F(t)$ et $F(1)$ convergent. En soustrayant leurs sommes partielles et en les divisant par la constante non nulle $t - 1$, puis en passant à la limite, on obtient

$$Q(t) = \frac{F(t) - F(1)}{t - 1} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_j (1 + t + \dots + t^{j-1}).$$

La série de droite converge pour chaque $t < 1$: son terme est au plus $p_j/(1 - t)$, et

$$\sum p_j$$

converge. Chaque somme géométrique finie est croissante en $t \in [0, 1[$. Les coefficients sont positifs ou nuls, donc les sommes partielles, puis leur limite Q , sont croissantes.

3. b) Pour $0 \leq t < 1$, les j termes de la somme $1 + t + \dots + t^{j-1}$ sont au plus 1. Ainsi,

$$0 \leq Q(t) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j.$$

La borne supérieure est finie par hypothèse. La fonction Q est croissante d'après I.3.a ; le théorème des limites des fonctions monotones assure donc l'existence d'une limite finie en 1^- .

Cette limite est, par définition, la dérivée à gauche de F en 1. Ainsi, F est dérivable en 1 et

$$F'(1) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j.$$

3. c) Par positivité des termes de la série de I.3.a, chaque somme partielle est majorée par la somme totale :

$$\sum_{j=1}^n p_j(1 + t + \dots + t^{j-1}) \leq Q(t).$$

Fixons $n \geq 1$ et faisons tendre t vers 1^- : la somme de gauche est finie et son j -ième terme tend vers jp_j . À droite, la dérivabilité supposée donne $Q(t) \rightarrow F'(1)$. Par conséquent,

$$\sum_{j=1}^n jp_j \leq F'(1).$$

Les sommes partielles de

$$\sum jp_j$$

sont croissantes, puisque les termes sont positifs, et majorées par le nombre fini $F'(1)$. Le théorème de la limite monotone pour les suites assure la convergence de cette série.

En passant à la limite dans l'inégalité,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} jp_j \leq F'(1).$$

Pour $n = 0$, la somme est vide et vaut 0, donc l'inégalité est encore vraie.

3. d) I.3.b démontre qu'une série

$$\sum jp_j$$

convergente entraîne la dérivabilité de F en 1. I.3.c démontre la réciproque. Lorsque ces conditions sont vérifiées, les deux inégalités obtenues se combinent et donnent

$$F'(1) = \sum_{j=1}^{+\infty} jp_j.$$

C'est donc une équivalence avec égalité des deux valeurs, démontrée sans échange automatique entre dérivée et somme infinie.

3. e) Puisque $X \geq 0$ et $P(X = n) = p_n$, l'existence de son espérance est équivalente à la convergence de la série à termes positifs

$$\sum_{n \geq 0} np_n.$$

Lorsqu'elle converge, le transfert donne

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n.$$

D'après I.3.d, X admet une espérance finie si et seulement si F admet une dérivée à gauche finie en 1. Dans ce cas,

$$E(X) = F'(1).$$

Si le quotient $Q(t)$ tend vers $+\infty$, F ne possède pas de dérivée à gauche finie et la série des moments diverge. On peut parler d'espérance infinie pour cette variable positive, mais elle n'admet alors pas une espérance finie au sens du référentiel.

4. Produit de deux fonctions génératrices.

4. a) Pour tout $n \geq 0$, le changement d'indices suivant porte uniquement sur des sommes finies :

$$\sum_{j=0}^n r_j = \sum_{\substack{i,k \geq 0 \\ i+k \leq n}} p_i q_k.$$

Les couples tels que $i + k \leq n$ appartiennent tous au carré $0 \leq i, k \leq n$. Tous les termes étant positifs ou nuls,

$$\sum_{j=0}^n r_j \leq \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n p_i q_k = \left(\sum_{i=0}^n p_i \right) \left(\sum_{k=0}^n q_k \right).$$

Ce produit est majoré par

$$\left(\sum_{i \geq 0} p_i \right) \left(\sum_{k \geq 0} q_k \right),$$

nombre fini. Les sommes partielles de

$$\sum r_j$$

sont croissantes et majorées. La série

$$\sum r_j$$

converge donc par le théorème de la limite monotone.

4. b) Pour $t \in [0, 1]$, les fonctions F, G, H sont bien définies par I.1.a, appliquée aux trois suites ; la convergence de

$$\sum r_j$$

a été établie en I.4.a.

Développons seulement le produit des sommes finies :

$$\left(\sum_{i=0}^n p_i t^i \right) \left(\sum_{k=0}^n q_k t^k \right) = \sum_{0 \leq i, k \leq n} p_i q_k t^{i+k}.$$

Le triangle $i + k \leq n$ est inclus dans ce carré, lequel est inclus dans le triangle $i + k \leq 2n$. La positivité des termes donne donc

$$\sum_{j=0}^n r_j t^j \leq \left(\sum_{j=0}^n p_j t^j \right) \left(\sum_{j=0}^n q_j t^j \right) \leq \sum_{j=0}^{2n} r_j t^j.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, les deux membres extrêmes tendent vers $H(t)$. Le produit central tend vers $F(t)G(t)$, car ses deux facteurs convergent vers des réels finis. Par encadrement,

$$F(t)G(t) = H(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La preuve utilise des inclusions d'ensembles finis d'indices et des limites de sommes partielles ; aucun théorème sur des réarrangements de séries doubles n'est nécessaire.

Partie II

Préambule probabiliste

Question adaptée au programme actuel : l'indépendance des jets est explicitée. Le jeu s'arrête à la première ruine ; $p_n(K)$ désigne donc une probabilité de première ruine, et non une probabilité cumulée.

Pour un capital initial $K \geq 1$, notons $A_n(K)$ l'événement «le joueur est ruiné pour la première fois au jet n », pour $n \geq 1$. Ces événements sont deux à deux disjoints, et $R_K = \bigcup_{n \geq 1} A_n(K)$. Par additivité et continuité monotone des probabilités,

$$P(R_K) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N P(A_n(K)) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(K).$$

Cette série converge, car ses sommes partielles sont croissantes et au plus égales à 1.

Avec $p_0(K) = 0$, on obtient

$$P(R_K) = F_K(1), \quad 0 \leq F_K(t) \leq 1 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

La partie I s'applique donc à chaque fonction F_K : elle est notamment continue sur $[0, 1]$.

Dans la suite, on pose $q = 1 - p$, avec $0 < q < 1$.

II.1. Étude du cas particulier $K = 1$

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur.

1. a) Le joueur est ruiné dès le premier jet exactement si la pièce donne Pile. Donc

$$p_1(1) = q.$$

Au bout de deux jets, un capital initial égal à 1 ne peut être devenu 0 : sa variation est la somme de deux nombres égaux à 1 ou -1 , donc un entier pair. Ainsi, $p_2(1) = 0$.

Pour une première ruine au troisième jet, la seule suite possible est Face, Pile, Pile. Les capitaux successifs sont 1, 2, 1, 0, et les jets sont indépendants. Par conséquent,

$$p_1(1) = q, \quad p_2(1) = 0, \quad p_3(1) = pq^2.$$

La suite Pile, Face, Pile ne convient pas : le jeu aurait déjà cessé au premier jet.

1. b) Supposons que la première ruine survienne au jet $n + 1$, avec $n \geq 2$. Le premier jet doit donner Face, car Pile ruinerait immédiatement le joueur. Le capital devient alors 2.

Pour passer de 2 à 0 par des variations de 1 ou -1 , le capital doit d'abord atteindre 1. Notons j le nombre de jets, après le premier, jusqu'à ce premier retour à 1. Il est unique, vaut au moins 1 et au plus $n - 1$, car il reste au moins un jet pour atteindre 0. Le bloc suivant comporte $n - j$ jets et conduit pour la première fois de 1 à 0.

Réciproquement, si ces trois étapes se réalisent pour un $j \in \{1, \dots, n - 1\}$, le capital reste au moins 2 dans le deuxième bloc avant son dernier jet, puis reste positif dans le troisième avant son dernier jet. La première ruine intervient donc exactement au jet $1 + j + (n - j) = n + 1$.

Le premier jet donne Face avec probabilité p . Conditionnellement à cette étape, la probabilité de descendre de 2 à 1 pour la première fois au bout de j jets est $p_j(1)$: soustraire 1 au capital transforme ce bloc en un jeu partant de 1 et s'arrêtant à 0. Après ce bloc, la probabilité d'une première ruine en $n - j$ jets est $p_{n-j}(1)$.

Pour un j fixé, les blocs concernent des ensembles disjoints et déterministes de jets. Leur indépendance et la formule des probabilités composées donnent la probabilité totale $pp_j(1)p_{n-j}(1)$. Il n'est pas nécessaire d'invoquer un théorème sur des temps aléatoires.

Les événements correspondant à des j distincts sont disjoints, puisque le premier retour à 1 ne peut avoir deux dates. Ainsi,

$$p_{n+1}(1) = p \sum_{j=1}^{n-1} p_j(1)p_{n-j}(1) = p \sum_{j=0}^n p_j(1)p_{n-j}(1), \quad n \geq 2.$$

Les termes ajoutés aux extrémités sont nuls puisque $p_0(1) = 0$. Pour $n = 0$ ou $n = 1$, la somme est elle-même nulle. Cela établit toute la formule demandée.

La précision conditionnelle apportée au sujet évite de traiter les trois étapes comme des événements inconditionnels indépendants.

1. c) Posons

$$r_n = \sum_{j=0}^n p_j(1)p_{n-j}(1).$$

I.4 donne, pour $0 \leq t \leq 1$,

$$[F_1(t)]^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n.$$

Les séries sont convergentes ; on peut multiplier par la constante pt puis utiliser II.1.1.b terme par terme dans les sommes partielles avant de passer à la limite. On obtient

$$pt[F_1(t)]^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} p_{n+1}(1)t^{n+1} = F_1(t) - p_1(1)t - p_2(1)t^2.$$

Comme $p_1(1) = q$ et $p_2(1) = 0$,

$$pt[F_1(t)]^2 = F_1(t) - qt.$$

Cette identité reste vraie pour $t = 0$ et $t = 1$.

1. d) La fonction $D(t) = 1 - 4pqt^2$ a pour dérivée $D'(t) = -8pqt < 0$ sur $]0, 1[$. Elle y est strictement décroissante, et

$$D(t) > D(1) = 1 - 4pq = (1 - 2p)^2 \geq 0.$$

Pour $0 < t < 1$, le coefficient pt de l'équation quadratique est strictement positif et son discriminant $D(t)$ est strictement positif. Les deux racines réelles distinctes sont

$$x'(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2pt}, \quad x''(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2pt}.$$

Pour montrer que $x''(t) > 1$, considérons le polynôme $P_t(x) = ptx^2 - x + qt$. Il vérifie $P_t(1) = t - 1 < 0$. Un polynôme du second degré de coefficient dominant positif est négatif exactement entre ses deux racines ; ainsi,

$$x'(t) < 1 < x''(t).$$

La relation de II.1.1.c impose que $F_1(t)$ soit l'une de ces deux racines. Le préambule donne $F_1(t) \leq 1$, ce qui exclut $x''(t)$. On conclut que

$$F_1(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2pt} \quad (0 < t < 1).$$

Pour les calculs à proximité de 0, une rationalisation fournit aussi l'expression équivalente

$$F_1(t) = \frac{2qt}{1 + \sqrt{1 - 4pqt^2}}.$$

Son dénominateur est strictement positif, et elle se prolonge en 0 par $F_1(0) = 0$.

1. e) La continuité de F_1 en 1, établie dans la partie I, permet d'y passer à la limite dans la formule précédente. On a

$$F_1(1) = \frac{1 - |1 - 2p|}{2p}.$$

Si $p \leq 1/2$, alors $|1 - 2p| = 1 - 2p$, donc $F_1(1) = 1$. Si $p > 1/2$, alors $|1 - 2p| = 2p - 1$, donc $F_1(1) = q/p$. Par conséquent,

$$P(R_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{q}{p} & \text{si } \frac{1}{2} < p < 1. \end{cases}$$

Pour $p \leq 1/2$, la ruine se produit presque sûrement; pour $p > 1/2$, elle a une probabilité strictement inférieure à 1.

2. Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p \leq \frac{1}{2}$.

Pour $p \leq 1/2$, la question précédente donne $P(R_1) = 1$. Le temps de ruine X_1 est donc fini presque sûrement et vérifie $P(X_1 = n) = p_n(1)$. On peut lui donner une valeur arbitraire sur l'événement négligeable de non-ruine, sans changer sa loi.

Méthode 1 — Calcul direct du quotient à l'extrémité.

Posons $y = F_1(t)$ pour $0 \leq t < 1$. Puisque $F_1(1) = 1$, soustrayons l'identité quadratique en $t = 1$ de celle en t . Avec $p + q = 1$, on obtient

$$[pt(y + 1) - 1](y - 1) + (t - 1) = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{F_1(t) - 1}{t - 1} = \frac{1}{1 - pt(F_1(t) + 1)}.$$

Le dénominateur est positif : $0 \leq F_1(t) \leq 1$, $p \leq 1/2$ et $t < 1$ donnent $pt(F_1(t) + 1) < 1$.

Par continuité, lorsque $t \rightarrow 1^-$, il tend vers $1 - 2p$.

Pour $p < 1/2$, la limite du quotient est finie, égale à $1/(1 - 2p)$. I.3.e assure alors l'existence de l'espérance et donne

$$E(X_1) = F_1'(1) = \frac{1}{1 - 2p}.$$

Pour $p = 1/2$, le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives ; le quotient tend vers $+\infty$. D'après I.3.d-e, la série

$$\sum np_n(1)$$

diverge. La ruine est presque sûre, mais le temps d'attente n'a pas d'espérance finie.

Méthode 2 — Dériver une expression explicite finie.

Pour $p < 1/2$, $D(1) = (1 - 2p)^2 > 0$. La formule explicite de F_1 se prolonge donc en une fonction dérivable sur un voisinage de 1. En dérivant l'identité $ptF_1(t)^2 - F_1(t) + qt = 0$, on obtient

$$(1 - 2ptF_1(t))F_1'(t) = pF_1(t)^2 + q.$$

En $t = 1$, $F_1(1) = 1$ et $1 - 2p > 0$, donc $F_1'(1) = (p + q)/(1 - 2p) = 1/(1 - 2p)$. L'existence de cette dérivée finie et I.3.e donnent encore $E(X_1) = 1/(1 - 2p)$.

Pour $p = 1/2$, l'expression est $F_1(t) = (1 - \sqrt{1-t^2})/t$ pour $0 < t < 1$. Son quotient en 1 vaut

$$\frac{F_1(t) - 1}{t - 1} = \frac{1}{t} \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - 1 \right),$$

qui tend vers $+\infty$. I.3.e exclut encore une espérance finie.

La première méthode traite directement la dérivée à gauche et le cas divergent ; la seconde exploite la régularité d'une formule explicite. Aucune ne dérive une somme infinie.

3. Expression des probabilités $p_n(1)$.

3. a) Question adaptée au programme actuel. La composition de développements limités est remplacée par l'évaluation d'une formule de Taylor et le contrôle explicite de son reste.

Soit $g(x) = \sqrt{1+x}$, définie et de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$. Pour $k \geq 1$, des dérivations successives donnent

$$g^{(k)}(x) = \left(\prod_{r=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - r \right) \right) (1+x)^{1/2-k}.$$

Pour un entier $m \geq 0$, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $m+1$ s'écrit

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m+1} b_k x^k + R_{m+1}(x),$$

$$b_0 = 1, \quad b_k = \frac{1}{k!} \prod_{r=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - r \right) \quad (k \geq 1),$$

$$R_{m+1}(x) = \frac{1}{(m+1)!} \int_0^x (x-v)^{m+1} g^{(m+2)}(v) dv.$$

Sur $[-1/2, 1/2]$, $g^{(m+2)}$ est continue et donc bornée en valeur absolue par une constante B_m . L'estimation de l'intégrale, valable aussi pour $x < 0$ en inversant ses bornes, donne

$$|R_{m+1}(x)| \leq \frac{B_m}{(m+2)!} |x|^{m+2}.$$

Évaluons cette identité finie en $x = -4pqt^2$, pour t assez proche de 0 pour que $|x| \leq 1/2$. La borne sur le reste donne

$$\sqrt{1-4pqt^2} = 1 + \sum_{k=1}^{m+1} b_k (-4pq)^k t^{2k} + O(t^{2m+4}).$$

Vérifions les coefficients. Pour $k \geq 1$,

$$b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \prod_{r=1}^{k-1} (2r-1).$$

Le produit vide vaut 1 pour $k = 1$. La séparation des facteurs pairs et impairs dans $(2k-2)!$ donne

$$\prod_{r=1}^{k-1} (2r-1) = \frac{(2k-2)!}{2^{k-1} (k-1)!}.$$

Ainsi,

$$b_k (-4)^k = -2 \frac{(2k-2)!}{k! (k-1)!}.$$

En reportant l'identité dans $F_1(t) = (1 - \sqrt{1 - 4pqt^2})/(2pt)$, pour $t > 0$, on obtient

$$F_1(t) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} p^{k-1} q^k t^{2k-1} + O(t^{2m+3}).$$

Posons $j = k - 1$. Cela donne

$$F_1(t) = \sum_{j=0}^m \frac{(2j)!}{j!(j+1)!} p^j q^{j+1} t^{2j+1} + o(t^{2m+1}).$$

Le dernier reste est justifié puisque $O(t^{2m+3})/t^{2m+1} = O(t^2) \rightarrow 0$. C'est le développement limité demandé, obtenu par contrôle du reste et non par une règle générale de composition de développements limités.

3. b) I.2 établit que les coefficients du développement limité à droite de F_1 en 0 sont les probabilités $p_n(1)$. Le développement précédent ne contient que des puissances impaires. Par unicité des coefficients du développement limité,

$$p_{2n}(1) = 0, \quad p_{2n+1}(1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p^n q^{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Pour obtenir une probabilité donnée, il suffit de prendre un ordre de développement assez grand. Le cas $n = 0$ donne $p_0(1) = 0$ et $p_1(1) = q$, conformément aux résultats précédents.

L'unicité utilisée ici est élémentaire : si deux polynômes de degré au plus N diffèrent de $o(t^N)$ près de 0^+ , leur différence est nulle. Sinon, en divisant par sa plus petite puissance non nulle de t , on obtiendrait un coefficient non nul égal à une quantité tendant vers 0.

II.2. Étude du cas général

1. Étude de la probabilité de ruine du joueur.

1. a) Conditionnons par le premier jet. Pour $n \geq 2$, une première ruine au jet n est impossible si le premier jet donne Pile, car le joueur est alors déjà ruiné au jet 1. Si le premier jet donne Face, de probabilité p , le capital devient 2 ; les jets suivants sont indépendants du premier et ont la même loi. La probabilité conditionnelle de première ruine après $n - 1$ jets supplémentaires est $p_{n-1}(2)$.

Les probabilités totales donnent donc

$$p_n(1) = p p_{n-1}(2), \quad n \geq 2.$$

En multipliant par t^n puis en sommant les séries convergentes, avec $p_0(2) = 0$, on obtient

$$F_1(t) - qt = p \sum_{n=2}^{+\infty} p_{n-1}(2) t^n = pt F_2(t).$$

Comparons avec II.1.1.c, qui donne $F_1(t) - qt = pt F_1(t)^2$. Pour $t > 0$, la division par $pt > 0$ donne

$$F_2(t) = F_1(t)^2.$$

Pour $t = 0$, les deux membres sont nuls, car $p_0(1) = p_0(2) = 0$. La formule est donc vraie sur tout $[0, 1]$.

1. b) Pour $K \geq 2$, le joueur ne peut pas être ruiné au premier jet : son capital devient $K + 1$ ou $K - 1$, deux entiers strictement positifs. Plus généralement, la formule des probabilités totales sur le premier jet donne, pour $n \geq 1$,

$$p_n(K) = p p_{n-1}(K + 1) + q p_{n-1}(K - 1).$$

Pour $n = 1$, les deux termes sont nuls puisque $p_0(K + 1) = p_0(K - 1) = 0$, ce qui est cohérent. Pour $n = 0$, la convention donne $p_0(K) = 0$.

En multipliant par t^n et en sommant pour $n \geq 1$, on obtient, par linéarité de séries convergentes,

$$F_K(t) = ptF_{K+1}(t) + qtF_{K-1}(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Étudions maintenant la suite $u_K = F_K(t)$ pour un t fixé dans $]0, 1[$, comme demandé. Sa récurrence est

$$ptu_{K+1} - u_K + qt u_{K-1} = 0, \quad K \geq 2.$$

L'équation caractéristique réelle est $ptr^2 - r + qt = 0$. Ses deux racines sont $r = x'(t)$ et $R = x''(t)$, déterminées en II.1.1.d. Elles vérifient $0 < r < 1 < R$; la positivité de r vient de $0 < 1 - 4pqt^2 < 1$.

Le résultat du cours sur les récurrences linéaires réelles d'ordre deux à racines distinctes donne des constantes réelles A, B telles que

$$u_K = Ar^K + BR^K, \quad K \geq 1.$$

Comme $0 \leq u_K \leq 1$ pour tout K , on a $u_K/R^K \rightarrow 0$. Or

$$\frac{u_K}{R^K} = A \left(\frac{r}{R} \right)^K + B \rightarrow B.$$

Ainsi, $B = 0$. En outre, $u_1 = F_1(t) = r$ et $r > 0$, donc $A = 1$. On en déduit

$$F_K(t) = F_1(t)^K = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2pt} \right)^K, \quad 0 < t < 1.$$

En 0, les deux côtés de $F_K(0) = F_1(0)^K$ valent 0. En 1, la continuité des fonctions génératrices et d'une puissance finie permet de passer à la limite $t \rightarrow 1^-$. Ainsi,

$$F_K(t) = F_1(t)^K \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Cette méthode résout une récurrence réelle à t fixé et utilise la borne probabiliste pour sélectionner la racine ; elle n'a pas besoin d'une théorie des processus aléatoires.

1. c) En évaluant l'identité précédente en 1, puis en utilisant II.1.1.e,

$$P(R_K) = F_K(1) = F_1(1)^K = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{q}{p}\right)^K & \text{si } \frac{1}{2} < p < 1. \end{cases}$$

La ruine est donc presque sûre pour tous les capitaux initiaux $K \geq 1$ lorsque $p \leq 1/2$. Lorsque $p > 1/2$, sa probabilité décroît géométriquement avec K .

2. Espérance du temps d'attente de la ruine du joueur pour $p < \frac{1}{2}$.

Pour $p \leq 1/2$, II.2.1.c donne la ruine presque sûre. La variable X_K de temps de ruine est donc finie presque sûrement, et sa loi est $P(X_K = n) = p_n(K)$. Comme pour X_1 , une définition arbitraire sur l'événement négligeable de non-ruine donne une variable réelle définie partout.

Pour $p < 1/2$, II.1.2 donne la dérivée à gauche finie $F'_1(1) = 1/(1 - 2p)$, et $F_1(1) = 1$. Puisque $F_K = F_1^K$, la dérivation d'un produit fini donne

$$F'_K(1) = K F_1(1)^{K-1} F'_1(1) = \frac{K}{1 - 2p}.$$

I.3.e assure alors l'existence de l'espérance et permet de conclure que

$$E(X_K) = \frac{K}{1-2p}.$$

Traisons le cas $p = 1/2$ sans utiliser une règle de dérivation avec une dérivée infinie.

Pour $0 \leq t < 1$, la factorisation d'une différence de puissances donne

$$\frac{F_K(t) - 1}{t - 1} = \frac{F_1(t) - 1}{t - 1} \sum_{j=0}^{K-1} F_1(t)^j.$$

Le premier facteur tend vers $+\infty$ d'après II.1.2. Le second tend vers $K > 0$ puisque $F_1(t) \rightarrow 1$. Le quotient tend donc vers $+\infty$.

Par I.3.d-e, la série

$$\sum np_n(K)$$

diverge : à $p = 1/2$, le joueur est ruiné presque sûrement, mais son temps de ruine n'admet pas d'espérance finie, quel que soit $K \geq 1$.

3. Expression des probabilités $p_n(K)$.

3. a) La relation de II.2.1.a donne $p_{r-1}(2) = p_r(1)/p$ pour $r \geq 2$, la division étant permise puisque $p > 0$.

Avec $r = 2n + 2$, pour $n \geq 0$, on obtient

$$p_{2n+1}(2) = p_{2n+2}(1)/p = 0.$$

Avec $r = 2n + 1$, pour $n \geq 1$, la formule de II.1.3.b donne

$$p_{2n}(2) = \frac{p_{2n+1}(1)}{p} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p^{n-1} q^{n+1}.$$

Le cas $n = 0$ doit être traité séparément : $p_0(2) = 0$ par convention. En résumé,

$$p_{2n}(2) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} p^{n-1} q^{n+1} & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \quad p_{2n+1}(2) = 0.$$

Pour $n = 1$, la formule donne $p_2(2) = q^2$, ce qui correspond bien aux deux jets Pile successifs.

3. b) Commençons par $K = 3$, puis établissons la formule générale.

Pour tout $N \geq 0$, la récurrence de II.2.1.b appliquée au capital 2 et au temps $N + 1$ donne

$$p_N(3) = \frac{p_{N+1}(2) - qp_N(1)}{p}.$$

Pour $N = 2n$, les deux termes du numérateur sont nuls : $p_{2n+1}(2) = 0$ et $p_{2n}(1) = 0$.

Ainsi, $p_{2n}(3) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Pour $N = 2n + 1$, posons $C_n = (2n)!/(n!(n+1)!)$. Les formules déjà obtenues donnent

$$p_{2n+1}(3) = (C_{n+1} - C_n)p^{n-1}q^{n+2}.$$

Pour $n = 0$, $C_1 - C_0 = 0$, donc $p_1(3) = 0$. Pour $n \geq 1$, calculons explicitement la différence :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(2n+1)}{n+2},$$

$$C_{n+1} - C_n = C_n \frac{3n}{n+2} = \frac{3(2n)!}{(n-1)!(n+2)!}.$$

Par conséquent,

$$p_{2n+1}(3) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{3(2n)!}{(n-1)!(n+2)!} p^{n-1} q^{n+2} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Passons au capital général $K \geq 1$. Pour être ruiné exactement au jet N , il faut au moins K jets, donc $N \geq K$. Il faut également que N et K aient la même parité : si j est le nombre de Face, la variation totale vaut $j - (N - j) = -K$, d'où $N = K + 2j$.

Nous allons établir, pour tout entier $j \geq 0$,

$$p_{K+2j}(K) = \frac{K(K+2j-1)!}{j!(K+j)!} p^j q^{K+j}.$$

Pour les temps $N < K$ ou de parité différente de celle de K , la probabilité est nulle. Ces conditions suffisent donc à couvrir tous les temps.

Méthode 1 — Dénombrement par une bijection explicitement construite.

Fixons $N = K + 2j$. Le dernier jet d'une première ruine est nécessairement Pile et le capital juste avant ce jet vaut 1. On doit donc compter les suites des $N - 1$ premiers jets qui conduisent de K à 1 sans avoir auparavant atteint 0.

Ces suites contiennent j Face et $N - 1 - j$ Pile. Si l'on ignore la contrainte de rester strictement positif, leur nombre est $\binom{N-1}{j}$.

Comptons les suites qui ne respectent pas cette contrainte. Pour une telle suite, notons τ son premier passage au capital 0. Invertissons les résultats Face et Pile jusqu'au jet τ inclus, et considérons la suite de capitaux ainsi obtenue comme partant de $-K$. Jusqu'à τ , ses capitaux sont les opposés des capitaux initiaux ; au temps τ , les deux capitaux valent 0, et ensuite les résultats des jets sont inchangés. La nouvelle suite part de $-K$ et arrive à 1 en $N - 1$ jets.

Réciproquement, toute suite partant de $-K$ et arrivant à 1 doit passer par 0, car chaque variation vaut 1 ou -1 . En inversant les résultats jusqu'à son premier passage en 0, on retrouve une unique suite partant de K , arrivant à 1 et ayant touché 0. Les deux constructions sont inverses ; c'est une bijection, démontrée ici sans supposer connu un principe général de réflexion.

Une suite partant de $-K$ et arrivant à 1 en $N - 1$ jets contient $j + K$ Face, car sa variation totale vaut $K + 1$. Pour $j \geq 1$, son nombre est donc

$$\binom{N-1}{j+K} = \binom{N-1}{j-1},$$

la dernière égalité venant de $N = K + 2j$ et de la symétrie des coefficients binomiaux. Si $j = 0$, il n'y a aucune mauvaise suite : les $K - 1$ premiers jets sont tous Pile et conduisent de K à 1 en restant positifs.

Pour $j \geq 1$, le nombre de suites admissibles est

$$\binom{N-1}{j} - \binom{N-1}{j-1} = \binom{N-1}{j} \left(1 - \frac{j}{N-j}\right) = \frac{K(N-1)!}{j!(K+j)!}.$$

En effet, $N - 2j = K$ et $N - j = K + j$. Pour $j = 0$, la même expression vaut $K(K-1)!/K! = 1$, nombre de l'unique suite admissible.

Après ajout du dernier jet Pile, chaque suite admissible contient j Face et $K + j$ Pile. Par indépendance, chacune a la même probabilité $p^j q^{K+j}$. Il suffit donc de multiplier le nombre de suites par cette probabilité :

$$p_{K+2j}(K) = \frac{K(K+2j-1)!}{j!(K+j)!} p^j q^{K+j}.$$

La bijection sert uniquement à compter les suites ; on ne lui attribue pas une conservation de leurs probabilités lorsque $p \neq q$.

Méthode 2 — Récurrence sur le capital initial.

La formule est déjà établie pour $K = 1$ par II.1.3.b et pour $K = 2$ par II.2.3.a. Pour le deuxième cas, l'identité $2(2j+1)!/j!(j+2)! = (2j+2)!/((j+1)!(j+2)!)$ fait coïncider les deux expressions.

Supposons la formule vraie pour les capitaux $K-1$ et K , avec $K \geq 2$. Pour un temps N compatible avec le capital $K+1$, écrivons $N = K+1+2j$, avec $j \geq 0$. La récurrence sur le premier jet donne

$$p_N(K+1) = \frac{p_{N+1}(K) - qp_N(K-1)}{p}.$$

Les deux probabilités du numérateur ont des temps compatibles avec leurs capitaux. Les hypothèses de récurrence fournissent

$$p_{N+1}(K) = \frac{KN!}{(j+1)!(K+j+1)!} p^{j+1} q^{K+j+1},$$

$$qp_N(K-1) = \frac{(K-1)(N-1)!}{(j+1)!(K+j)!} p^{j+1} q^{K+j+1}.$$

En factorisant et en divisant par $p > 0$, on obtient

$$p_N(K+1) = \frac{(N-1)!}{(j+1)!(K+j+1)!} (KN - (K-1)(K+j+1)) p^j q^{K+j+1}.$$

Avec $N = K+1+2j$, le terme entre parenthèses vaut

$$K(K+1+2j) - (K-1)(K+j+1) = (K+1)(j+1).$$

La simplification donne

$$p_N(K+1) = \frac{(K+1)(N-1)!}{j!(K+j+1)!} p^j q^{K+j+1},$$

qui est la formule annoncée au capital $K+1$. Pour les temps inférieurs au capital ou de parité incorrecte, la probabilité est nulle par les conditions nécessaires établies avant les deux méthodes. La récurrence est donc complète.

La première méthode explique le facteur combinatoire en comptant les trajectoires possibles ; la seconde réutilise les relations sur le premier jet pour établir les coefficients par une récurrence algébrique.

Écrivons enfin les résultats exactement sous la forme demandée.

Si $K = 2r$ est pair, avec $r \geq 1$, alors pour tout $n \geq 0$,

$$p_{2n}(2r) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < r, \\ \frac{2r(2n-1)!}{(n-r)!(n+r)!} p^{n-r} q^{n+r} & \text{si } n \geq r, \end{cases}$$

$$p_{2n+1}(2r) = 0.$$

Si $K = 2r + 1$ est impair, avec $r \geq 0$, alors pour tout $n \geq 0$,

$$p_{2n}(2r+1) = 0,$$

$$p_{2n+1}(2r+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < r, \\ \frac{(2r+1)(2n)!}{(n-r)!(n+r+1)!} p^{n-r} q^{n+r+1} & \text{si } n \geq r. \end{cases}$$

Toutes les factorielles de ces expressions ont des arguments entiers naturels dans les cas où elles sont employées. Pour le temps minimal $N = K$, la formule donne $p_K(K) = q^K$, correspondant à K Pile successifs.

Relevé des adaptations

- I.1 à I.3 : précision des conventions $t^0 = 1$, y compris en 0, et de la dérivée en 1 comme dérivée à gauche finie, puisque la fonction est définie sur $[0, 1]$. Les résultats demandés sont conservés.
- Partie II, préambule : indépendance des jets rendue explicite ; précision que $p_n(K)$ est la probabilité de première ruine au jet n , conformément à l'arrêt définitif du jeu.
- II.1.1.b : formulation des deux dernières étapes conditionnellement aux précédentes, et précision du premier retour à 1 après le premier jet. La décomposition et la formule du PDF sont conservées.
- II.1.3.a : remplacement du recours à une composition de développements limités par une formule de Taylor avec reste intégral, évaluée en $x = -4p(1 - p)t^2$ avec une majoration explicite du reste. L'objectif et les coefficients recherchés sont conservés.
- II.2.1.a : précision de la distinction entre les noms des événements du premier jet et la notation de la fonction génératrice $F_1(t)$; aucune modification mathématique.