



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1995

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

Dans cette partie, on désigne par λ un nombre réel non nul donné, et l'on se propose d'étudier par récurrence la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout entier naturel n , les deux conditions suivantes :

(R_n) : pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls,

$$f_n(x + y) = \sum_{k=0}^n f_{n-k}(x) f_k(y).$$

(D_n) : f_n est dérivable à droite en 0 et l'on a

$$f'_n(0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{f_n(y) - f_n(0)}{y} = \begin{cases} -\lambda & \text{si } n = 0, \\ \lambda & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

On note $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. La dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ signifie ici la dérivabilité sur $]0, +\infty[$ et la dérivabilité à droite en 0.

1. Étude du signe de la fonction f_0

Dans cette question, on considère une fonction $f_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (R_0) et (D_0) :

$$(R_0) : \forall x, y \geq 0, \quad f_0(x + y) = f_0(x) f_0(y).$$

$$(D_0) : f'_0(0) = -\lambda.$$

1. a) Établir que f_0 n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$. En faisant alors $x = 0$ dans la relation (R_0) , déterminer la valeur de $f_0(0)$.

1. b) En faisant $x = y = \frac{t}{2}$ dans la relation (R_0) , établir que $f_0(t) \geq 0$ lorsque $t \geq 0$.

1. c) On se propose enfin d'établir que $f_0(t) > 0$ lorsque $t \geq 0$. À cet effet, on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe un nombre réel positif t_0 tel que $f_0(t_0) = 0$. En déduire que $f_0(t_0/2) = 0$, puis, pour tout entier $n \geq 1$, que $f_0(t_0/2^n) = 0$. Montrer qu'alors $f_0(0) = 0$ et conclure.

2. Existence et unicité de la fonction f_0

Dans cette question, on considère $f_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (R_0) et (D_0) .

2. a) On considère un nombre réel strictement positif x .

- En formant, pour $y > 0$, le rapport $\frac{f_0(x+y) - f_0(x)}{y}$, prouver que f_0 est dérivable à droite en x et exprimer sa dérivée à droite en x .

- Justifier, à l'aide du résultat obtenu en 1, l'égalité $f_0(x-y) = \frac{f_0(x)}{f_0(y)}$ pour $0 \leq y \leq x$.

- En formant, pour $0 < y \leq x$, le rapport $\frac{f_0(x-y) - f_0(x)}{-y}$ à l'aide de cette expression de $f_0(x-y)$, prouver que f_0 est dérivable à gauche en x et exprimer sa dérivée à gauche en x .

2. b) En déduire que f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $f'_0(x)$ en fonction de λ et de $f_0(x)$.

2. c) Dériver la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} f_0(x)$, puis en déduire $f_0(x)$ en fonction de λ et de x .

2. d) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_0 ainsi obtenue vérifie (R_0) et (D_0) .

3. Existence et unicité de la fonction f_1

La fonction f_0 étant ainsi obtenue, on considère $f_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (R_1) et (D_1) :

$$(R_1) : \forall x, y \geq 0, \quad f_1(x+y) = f_1(x)f_0(y) + f_0(x)f_1(y).$$

$$(D_1) : f_1'(0) = \lambda.$$

3. a) Déterminer $f_1(0)$ à l'aide de la relation (R_1) et en déduire la limite du quotient $f_1(y)/y$ quand y tend vers 0 avec $y > 0$.

3. b) On considère un nombre réel strictement positif x .

- En formant, pour $y > 0$, le rapport $\frac{f_1(x+y) - f_1(x)}{y}$, prouver que f_1 est dérivable à droite en x et exprimer sa dérivée à droite en x .

- Justifier l'égalité $f_1(x) = f_1(x-y)f_0(y) + f_0(x-y)f_1(y)$ pour $0 \leq y \leq x$ et en déduire une expression de $f_1(x-y)$.

- En formant, pour $0 < y \leq x$, le rapport $\frac{f_1(x-y) - f_1(x)}{-y}$ à l'aide de cette expression de $f_1(x-y)$, prouver que f_1 est dérivable à gauche en x et exprimer sa dérivée à gauche en x .

3. c) En déduire que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $f_1'(x)$ en fonction de λ , $f_0(x)$ et $f_1(x)$.

3. d) Dériver la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} f_1(x)$, puis en déduire $f_1(x)$ en fonction de λ et de x .

3. e) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_1 ainsi obtenue vérifie (R_1) et (D_1) .

4. Existence et unicité de la fonction f_2

Les fonctions f_0 et f_1 étant ainsi obtenues, on considère $f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (R_2) et (D_2) .

4. a) Déterminer $f_2(0)$ à l'aide de la relation (R_2) et en déduire la limite du quotient $f_2(y)/y$ quand y tend vers 0 avec $y > 0$.

4. b) On considère un nombre réel strictement positif x .

- En formant, pour $y > 0$, le rapport $\frac{f_2(x+y) - f_2(x)}{y}$, prouver que f_2 est dérivable à droite en x et exprimer sa dérivée à droite en x .
- Justifier l'égalité $f_2(x) = f_2(x-y)f_0(y) + f_1(x-y)f_1(y) + f_0(x-y)f_2(y)$ pour $0 \leq y \leq x$ et en déduire une expression de $f_2(x-y)$.
- En formant, pour $0 < y \leq x$, le rapport $\frac{f_2(x-y) - f_2(x)}{-y}$ à l'aide de cette expression de $f_2(x-y)$, prouver que f_2 est dérivable à gauche en x et exprimer sa dérivée à gauche en x .

4. c) En déduire que f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que $f_2'(x) = \lambda(f_1(x) - f_2(x))$.

4. d) Dériver la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} f_2(x)$, puis en déduire $f_2(x)$ en fonction de λ et de x .

4. e) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_2 ainsi obtenue vérifie (R_2) et (D_2) .

5. Généralisation : existence et unicité de la fonction f_n , $n \geq 2$

On suppose avoir obtenu, pour tout entier k tel que $0 \leq k < n$, une et une seule fonction f_k vérifiant (R_k) et (D_k) , dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$.

On considère alors une fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (R_n) et (D_n) .

5. a) Déterminer $f_n(0)$ et la limite du quotient $f_n(y)/y$ quand y tend vers 0 avec $y > 0$.

5. b) Établir la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de λ , $f_{n-1}(x)$ et $f_n(x)$.

5. c) Dériver la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} f_n(x)$, puis en déduire $f_n(x)$ en fonction de λ et de x , d'abord dans le cas $n = 3$, puis, par récurrence, dans le cas général.

5. d) Réciproquement, montrer que la fonction dérivable f_n ainsi obtenue vérifie (R_n) et (D_n) .

Partie II

On considère les arrivées successives des clients à un guichet.

Étant donnés deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $t_1 < t_2$, on note $N(t_1, t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle de temps $]t_1, t_2]$.

Par convention, on pose $P(N(t_1, t_1) = 0) = 1$ et, lorsque $n \geq 1$, $P(N(t_1, t_1) = n) = 0$. On fait, dans toute la suite du problème, les trois hypothèses suivantes.

- A)** Étant donnés quatre nombres réels t_1, t_2, t_3, t_4 tels que $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, les variables aléatoires $N(t_1, t_2)$ et $N(t_3, t_4)$ sont indépendantes.

Cette hypothèse signifie que les nombres de clients se présentant au cours de deux intervalles de temps disjoints sont indépendants.

- B)** Pour tout entier naturel n , il existe une fonction $p_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout couple (t_1, t_2) de réels avec $t_1 \leq t_2$,

$$P(N(t_1, t_2) = n) = p_n(t_2 - t_1).$$

Cette hypothèse signifie que la probabilité pour que n clients se présentent entre les instants t_1 et t_2 dépend uniquement de la durée $t_2 - t_1$.

- C)** Il existe un réel $\lambda > 0$ et des fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de limites nulles en 0 telles que, pour tout couple (t_1, t_2) de réels avec $t_1 \leq t_2$,

$$P(N(t_1, t_2) = 1) = \lambda(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)\varepsilon_1(t_2 - t_1),$$

$$P(N(t_1, t_2) \geq 2) = (t_2 - t_1)\varepsilon(t_2 - t_1).$$

Cette hypothèse signifie que, pour une courte durée $t_2 - t_1$, la probabilité d'arrivée d'un seul client est approximativement proportionnelle à cette durée, tandis que la probabilité d'arrivée de plus d'un client est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client.

1. Équation fonctionnelle des fonctions p_n

On considère dans cette question deux nombres réels positifs ou nuls x et y .

1. a) Exprimer $P(N(0, x + y) = 0)$ en fonction de $P(N(0, x) = 0)$ et de $P(N(0, y) = 0)$, et en déduire que $p_0(x + y) = p_0(x)p_0(y)$.

1. b) Établir plus généralement que, pour tout entier naturel n ,

$$p_n(x + y) = \sum_{k=0}^n p_{n-k}(x)p_k(y).$$

2. Dérivabilité en 0 des fonctions p_n

2. a) Établir l'existence d'une fonction $\varepsilon_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 telle que

$$P(N(t_1, t_2) = 0) = 1 - \lambda(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)\varepsilon_0(t_2 - t_1).$$

2. b) Établir, pour tout entier $n \geq 2$, l'existence d'une fonction $\varepsilon_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de limite nulle en 0 telle que

$$P(N(t_1, t_2) = n) = (t_2 - t_1)\varepsilon_n(t_2 - t_1).$$

2. c) Établir, en posant $x = t_2 - t_1$, que $p_0(x) = 1 - \lambda x + x\varepsilon_0(x)$, que $p_1(x) = \lambda x + x\varepsilon_1(x)$ et donner de même un développement limité à l'ordre 1 de p_n pour $n \geq 2$.
2. d) En déduire les valeurs de $p'_0(0)$, de $p'_1(0)$ et de $p'_n(0)$ pour $n \geq 2$, ces dérivées étant prises à droite.
3. Loi de la variable aléatoire $N(t_1, t_2)$
 3. a) Établir que les fonctions p_0, p_1 et $p_n, n \geq 2$, vérifient les hypothèses (R_n) et (D_n) de la partie I.
 3. b) En déduire les expressions de $p_n(x)$ et de $P(N(t_1, t_2) = n)$ pour tout entier naturel n . Montrer que, pour $t_1 < t_2$, $N(t_1, t_2)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1)$; préciser sa loi lorsque $t_1 = t_2$.

4. Loi de l'instant d'arrivée du n -ième client

On fixe un instant-origine 0 et l'on note T_n la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ indiquant l'instant d'arrivée du n -ième client, $n \geq 1$, à partir de cet instant-origine.

4. a) Comparer, pour tout réel positif ou nul t , les événements $\{N(0, t) \leq n - 1\}$ et $\{T_n > t\}$.
4. b) En déduire la loi de T_1 et reconnaître celle-ci.
4. c) En déduire de même la fonction de répartition et une densité de T_2 , de T_3 , puis de T_n . Reconnaître la loi de λT_n comme une loi gamma de forme n et de taux 1; la loi de T_n est appelée loi gamma de forme n et de taux λ .
4. d) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire T_n .

5. Loi du nombre de clients procédant à un achat

On fixe $t_1 < t_2$ et l'on désigne par p , avec $0 < p < 1$, la probabilité pour qu'un client se présentant au guichet procède à un achat. Les décisions d'achat des différents clients sont indépendantes et indépendantes des arrivées ; chaque décision a la même probabilité p .

On note $A(t_1, t_2)$ la variable aléatoire indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle $]t_1, t_2]$ et procédant à un achat.

5. a) Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P(A(t_1, t_2) = k \mid N(t_1, t_2) = n)$ et reconnaître la loi de $A(t_1, t_2)$ conditionnée par $N(t_1, t_2) = n$.
5. b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire la loi de la variable aléatoire $A(t_1, t_2)$ et préciser son espérance.
5. c) Donner de même la loi de la variable aléatoire $B(t_1, t_2)$ indiquant le nombre de clients se présentant au guichet dans l'intervalle $]t_1, t_2]$ et ne procédant à aucun achat.
5. d) Étudier enfin l'indépendance des variables aléatoires $A(t_1, t_2)$ et $B(t_1, t_2)$.