



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1995

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Partie I

Dans cette partie, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; il n'est pas nécessaire de supposer $\lambda > 0$. Toutes les limites à l'origine sont prises à droite. Une dérivée à droite finie entraîne la continuité à droite, car

$$f(y) - f(0) = y \frac{f(y) - f(0)}{y} \longrightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0^+).$$

Nous utiliserons cette observation pour les fonctions vérifiant les conditions (D_n) .

1. Étude du signe de la fonction f_0

1. a) Non-nullité et valeur en 0

Si f_0 était identiquement nulle, sa dérivée à droite en 0 serait nulle. Or (D_0) impose $f'_0(0) = -\lambda \neq 0$. La fonction n'est donc pas identiquement nulle.

Il existe ainsi $y_0 \geq 0$ tel que $f_0(y_0) \neq 0$. En appliquant (R_0) à $(0, y_0)$,

$$f_0(y_0) = f_0(0)f_0(y_0).$$

On peut diviser par $f_0(y_0) \neq 0$, ce qui donne $f_0(0) = 1$.

1. b) Positivité au sens large

Pour $t \geq 0$, les deux nombres $t/2$ sont dans le domaine de (R_0) . On obtient

$$f_0(t) = f_0(t/2)^2 \geq 0.$$

Ainsi f_0 est positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+$.

1. c) Positivité stricte

Méthode 1 — Raisonement par l'absurde demandé

Supposons qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $f_0(t_0) = 0$. Comme $f_0(0) = 1$, on a nécessairement $t_0 > 0$.

La relation $f_0(t_0) = f_0(t_0/2)^2$ impose $f_0(t_0/2) = 0$. En répétant cet argument, une récurrence donne

$$f_0(t_0/2^n) = 0 \quad (n \geq 1).$$

Pour $h_n = t_0/2^n$, on a $h_n \rightarrow 0^+$. La dérivabilité à droite en 0 assure que $[f_0(h_n) - f_0(0)]/h_n$ tend vers le nombre fini $-\lambda$. Par l'identité

$$f_0(h_n) = f_0(0) + h_n \frac{f_0(h_n) - f_0(0)}{h_n},$$

on en déduit $f_0(h_n) \rightarrow f_0(0)$. Tous ces termes étant nuls, $f_0(0) = 0$, en contradiction avec I.1.a.

Il n'existe donc aucun zéro de f_0 . Avec I.1.b, on conclut

$$f_0(t) > 0 \quad (t \geq 0).$$

Méthode 2 — Positivité près de l'origine et subdivisions

La continuité à droite en 0 et $f_0(0) = 1$ donnent un réel $\delta > 0$ tel que $f_0(h) > 1/2$ pour $0 \leq h < \delta$.

Pour $t > 0$ fixé, choisissons un entier $m \geq 1$ tel que $t/m < \delta$. Des applications successives de (R_0) donnent

$$f_0(t) = f_0(t/m)^m > 0.$$

Le cas $t = 0$ suit de $f_0(0) = 1$. La première méthode montre qu'un zéro se propagerait jusqu'à l'origine ; la seconde propage la positivité locale à tout le domaine.

2. Existence et unicité de la fonction f_0

2. a) Dérivées à droite et à gauche

Fixons $x > 0$. Pour $y > 0$, (R_0) et $f_0(0) = 1$ donnent

$$\frac{f_0(x+y) - f_0(x)}{y} = f_0(x) \frac{f_0(y) - 1}{y} \longrightarrow -\lambda f_0(x).$$

La dérivée à droite en x existe et vaut $-\lambda f_0(x)$.

Pour $0 \leq y \leq x$, la relation appliquée à $(x-y, y)$ donne $f_0(x) = f_0(x-y)f_0(y)$. La positivité stricte établie en I.1.c justifie la division :

$$f_0(x-y) = \frac{f_0(x)}{f_0(y)}.$$

Pour $0 < y \leq x$, on forme bien le quotient avec le dénominateur $-y$:

$$\frac{f_0(x-y) - f_0(x)}{-y} = f_0(x) \frac{f_0(y) - 1}{yf_0(y)}.$$

Or $f_0(y) \rightarrow 1$ et $(f_0(y) - 1)/y \rightarrow -\lambda$. La dérivée à gauche existe donc et vaut également $-\lambda f_0(x)$.

2. b) Dérivabilité et relation différentielle

En tout $x > 0$, les deux dérivées unilatérales existent et coïncident; f_0 est donc dérivable et

$$f'_0(x) = -\lambda f_0(x).$$

En 0, cette même identité est vraie pour la dérivée à droite, puisque $f'_0(0) = -\lambda$ et $f_0(0) = 1$. Ainsi f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ au sens précisé dans le sujet et satisfait la relation annoncée partout sur ce domaine.

2. c) Expression de f_0

Méthode 1 — Facteur exponentiel imposé

Posons $g_0(x) = e^{\lambda x} f_0(x)$. Pour $x > 0$, les fonctions sont dérivables et

$$g'_0(x) = e^{\lambda x} (\lambda f_0(x) + f'_0(x)) = 0.$$

Une fonction dérivable de dérivée nulle est constante sur un intervalle, par le théorème des accroissements finis. La continuité à droite en 0 permet d'identifier cette constante avec $g_0(0) = 1$. Donc

$$f_0(x) = e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

Méthode 2 — Logarithme d'une fonction strictement positive

Par I.1.c, $f_0(x) > 0$. On peut donc définir $h(x) = \ln f_0(x)$. Pour $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{f'_0(x)}{f_0(x)} = -\lambda.$$

La fonction $h(x) + \lambda x$ a une dérivée nulle sur $]0, +\infty[$ et se prolonge continûment en 0 avec valeur $\ln 1 = 0$. Elle est donc identiquement nulle. Ainsi $\ln f_0(x) = -\lambda x$, puis $f_0(x) = e^{-\lambda x}$.

Le facteur exponentiel annule le terme proportionnel à f_0 ; le logarithme transforme cette même relation en une dérivée constante.

2. d) Vérification de l'existence

La fonction $f_0(x) = e^{-\lambda x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x, y \geq 0$,

$$f_0(x+y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} = f_0(x) f_0(y).$$

Elle vérifie donc (R_0) . De plus, $f'_0(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$, d'où $f'_0(0) = -\lambda$: (D_0) est satisfaite.

Les questions précédentes ont imposé cette expression à toute solution; la vérification montre qu'elle existe. La fonction f_0 est donc unique.

3. Existence et unicité de la fonction f_1

3. a) Valeur initiale et limite

En prenant $x = y = 0$ dans (R_1) et en utilisant $f_0(0) = 1$,

$$f_1(0) = 2f_1(0),$$

donc $f_1(0) = 0$. La condition (D_1) devient alors

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f_1(y)}{y} = \lambda.$$

Elle implique aussi $f_1(y) \rightarrow 0$ à droite en 0.

3. b) Dérivées unilatérales

Fixons $x > 0$. Pour $y > 0$, (R_1) donne

$$\frac{f_1(x+y) - f_1(x)}{y} = f_1(x) \frac{f_0(y) - 1}{y} + f_0(x) \frac{f_1(y)}{y}.$$

Les deux quotients ont des limites connues. La dérivée à droite vaut donc

$$-\lambda f_1(x) + \lambda f_0(x).$$

Pour $0 \leq y \leq x$, on applique (R_1) à $(x-y, y)$:

$$f_1(x) = f_1(x-y)f_0(y) + f_0(x-y)f_1(y).$$

Comme $f_0(y) > 0$, on peut isoler

$$f_1(x-y) = \frac{f_1(x) - f_0(x-y)f_1(y)}{f_0(y)}.$$

Il en résulte, pour $0 < y \leq x$,

$$\frac{f_1(x-y) - f_1(x)}{-y} = \frac{f_1(x) \frac{f_0(y) - 1}{y} + f_0(x-y) \frac{f_1(y)}{y}}{f_0(y)}.$$

La fonction f_0 est continue en x et à droite en 0, donc $f_0(x-y) \rightarrow f_0(x)$ et $f_0(y) \rightarrow 1$. Avec I.3.a, le quotient tend vers $-\lambda f_1(x) + \lambda f_0(x)$.

La dérivée à gauche existe et coïncide avec la dérivée à droite. Aucune continuité de f_1 en x n'a été supposée pour obtenir ce résultat.

3. c) Relation différentielle

Les deux dérivées unilatérales calculées en I.3.b donnent, pour $x > 0$,

$$f_1'(x) = \lambda(f_0(x) - f_1(x)).$$

En 0, le membre de droite vaut $\lambda(1 - 0) = \lambda$, qui est la dérivée à droite imposée. Ainsi la relation est valable sur tout $\mathbb{R}_+$ et f_1 y est dérivable au sens du sujet.

3. d) Expression de f_1

Méthode 1 — Facteur exponentiel imposé

Posons $g_1(x) = e^{\lambda x} f_1(x)$. En utilisant I.3.c et $f_0(x) = e^{-\lambda x}$,

$$g_1'(x) = e^{\lambda x}(\lambda f_1(x) + f_1'(x)) = \lambda e^{\lambda x} f_0(x) = \lambda.$$

La fonction $g_1(x) - \lambda x$ a donc une dérivée nulle sur $]0, +\infty[$ et est continue en 0. Comme $g_1(0) = 0$, elle est identiquement nulle. Ainsi

$$f_1(x) = \lambda x e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

Méthode 2 — Transformation de la relation fonctionnelle

En multipliant (R_1) par $e^{\lambda(x+y)}$ et en utilisant la formule de f_0 , on obtient directement

$$g_1(x+y) = g_1(x) + g_1(y).$$

De plus, $g_1(0) = 0$ et $g_1(y)/y = e^{\lambda y} f_1(y)/y \rightarrow \lambda$. Pour $x > 0$,

$$\frac{g_1(x+y) - g_1(x)}{y} = \frac{g_1(y)}{y} \rightarrow \lambda,$$

et, pour $0 < y \leq x$, l'additivité donne

$$\frac{g_1(x-y) - g_1(x)}{-y} = \frac{g_1(y)}{y} \rightarrow \lambda.$$

Ainsi $g_1'(x) = \lambda$. La continuité en 0 et $g_1(0) = 0$ donnent $g_1(x) = \lambda x$, donc encore $f_1(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$.

La première méthode exploite la dérivée déjà obtenue ; la seconde montre comment la relation de convolution se transforme ici en une relation additive élémentaire.

3. e) Vérification de l'existence

La fonction $f_1(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ est dérivable. Pour $x, y \geq 0$,

$$f_1(x)f_0(y) + f_0(x)f_1(y) = \lambda(x+y)e^{-\lambda(x+y)} = f_1(x+y).$$

La relation (R_1) est vérifiée. Par dérivation,

$$f_1'(x) = \lambda e^{-\lambda x} - \lambda^2 x e^{-\lambda x},$$

donc $f_1'(0) = \lambda$, ce qui vérifie (D_1) . Il existe donc une solution, et I.3.d montre qu'elle est unique.

4. Existence et unicité de la fonction f_2

4. a) Valeur initiale et limite

La relation (R_2) à $(0, 0)$ donne

$$f_2(0) = f_2(0)f_0(0) + f_1(0)^2 + f_0(0)f_2(0) = 2f_2(0).$$

Donc $f_2(0) = 0$. Puisque (D_2) impose une dérivée à droite nulle,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f_2(y)}{y} = 0.$$

En particulier, $f_2(y) \rightarrow 0$ à droite en 0.

4. b) Dérivées unilatérales

Fixons $x > 0$. Pour $y > 0$, la relation fonctionnelle donne

$$\frac{f_2(x+y) - f_2(x)}{y} = f_2(x) \frac{f_0(y) - 1}{y} + f_1(x) \frac{f_1(y)}{y} + f_0(x) \frac{f_2(y)}{y}.$$

Les limites de I.2.a, I.3.a et I.4.a donnent la dérivée à droite

$$-\lambda f_2(x) + \lambda f_1(x).$$

Pour $0 \leq y \leq x$, (R_2) appliquée à $(x-y, y)$ s'écrit

$$f_2(x) = f_2(x-y)f_0(y) + f_1(x-y)f_1(y) + f_0(x-y)f_2(y).$$

On divise par $f_0(y) > 0$ pour obtenir

$$f_2(x-y) = \frac{f_2(x) - f_1(x-y)f_1(y) - f_0(x-y)f_2(y)}{f_0(y)}.$$

Ainsi, pour $0 < y \leq x$,

$$\frac{f_2(x-y) - f_2(x)}{-y} = \frac{f_2(x) \frac{f_0(y) - 1}{y} + f_1(x-y) \frac{f_1(y)}{y} + f_0(x-y) \frac{f_2(y)}{y}}{f_0(y)}.$$

Les fonctions f_0 et f_1 sont déjà connues et continues en x . Le dénominateur tend vers 1 ; les trois termes au numérateur tendent respectivement vers $-\lambda f_2(x)$, $\lambda f_1(x)$ et 0.

La dérivée à gauche vaut donc elle aussi $\lambda(f_1(x) - f_2(x))$.

4. c) Relation différentielle

Les dérivées unilatérales coïncident en tout $x > 0$. En 0, (D_2) donne $f_2'(0) = 0$, et $\lambda(f_1(0) - f_2(0)) = 0$.

La fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie

$$f_2'(x) = \lambda(f_1(x) - f_2(x)).$$

4. d) Expression de f_2

Posons $g_2(x) = e^{\lambda x} f_2(x)$. Par I.4.c,

$$g_2'(x) = e^{\lambda x}(\lambda f_2(x) + f_2'(x)) = \lambda e^{\lambda x} f_1(x) = \lambda^2 x.$$

La fonction $g_2(x) - \lambda^2 x^2/2$ a donc une dérivée nulle sur $]0, +\infty[$. Elle est continue en 0 et y vaut 0, puisque $f_2(0) = 0$. Il en résulte

$$g_2(x) = \frac{\lambda^2 x^2}{2}, \quad f_2(x) = \frac{\lambda^2 x^2}{2} e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

4. e) Vérification de l'existence

On vérifie d'abord la relation fonctionnelle en remplaçant chaque fonction par son expression :

$$f_2(x)f_0(y) + f_1(x)f_1(y) + f_0(x)f_2(y) = e^{-\lambda(x+y)} \left(\frac{\lambda^2 x^2}{2} + \lambda^2 xy + \frac{\lambda^2 y^2}{2} \right).$$

Le terme entre parenthèses vaut $\lambda^2(x+y)^2/2$, donc la somme vaut $f_2(x+y)$. La relation (R_2) est satisfaite.

La fonction est dérivable et

$$f_2'(x) = e^{-\lambda x} \left(\lambda^2 x - \frac{\lambda^3 x^2}{2} \right),$$

donc $f'_2(0) = 0$, ce qui vérifie (D_2) . L'expression imposée en I.4.d définit ainsi l'unique solution.

5. Généralisation : existence et unicité de f_n

5. a) Valeur initiale et limite

Soit $n \geq 2$. On suppose les résultats établis pour tous les indices strictement inférieurs à n . Dans (R_n) à $(0, 0)$, les termes d'indices intermédiaires sont nuls, car ils contiennent des valeurs $f_j(0)$ avec $1 \leq j < n$. Les deux termes extrêmes donnent

$$f_n(0) = f_n(0)f_0(0) + f_0(0)f_n(0) = 2f_n(0).$$

Ainsi $f_n(0) = 0$. La condition (D_n) donne ensuite

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f_n(y)}{y} = 0.$$

5. b) Dérivabilité et relation différentielle générale

Fixons $x > 0$. Pour $y > 0$, en séparant le terme d'indice 0 dans (R_n) ,

$$\frac{f_n(x+y) - f_n(x)}{y} = f_n(x) \frac{f_0(y) - 1}{y} + \sum_{r=1}^n f_{n-r}(x) \frac{f_r(y)}{y}.$$

On sait que $(f_0(y) - 1)/y \rightarrow -\lambda$, que $f_1(y)/y \rightarrow \lambda$ et que $f_r(y)/y \rightarrow 0$ pour $r \geq 2$, y compris $r = n$ par I.5.a. La somme est finie. La dérivée à droite existe donc et vaut

$$-\lambda f_n(x) + \lambda f_{n-1}(x).$$

Pour la dérivée à gauche, on applique (R_n) à $(x - y, y)$, avec $0 \leq y \leq x$:

$$f_n(x) = f_n(x-y)f_0(y) + \sum_{r=1}^n f_{n-r}(x-y)f_r(y).$$

Comme $f_0(y) > 0$, on isole

$$f_n(x-y) = \frac{f_n(x) - \sum_{r=1}^n f_{n-r}(x-y)f_r(y)}{f_0(y)}.$$

Pour $0 < y \leq x$, le quotient à gauche est donc

$$\frac{f_n(x-y) - f_n(x)}{-y} = \frac{f_n(x) \frac{f_0(y) - 1}{y} + \sum_{r=1}^n f_{n-r}(x-y) \frac{f_r(y)}{y}}{f_0(y)}.$$

Dans la somme, tous les indices $n-r$ sont strictement inférieurs à n . Les fonctions correspondantes sont dérivables, donc continues en x , par l'hypothèse de récurrence. Chacun de ces facteurs tend vers $f_{n-r}(x)$. Les quotients ont les mêmes limites que pour la dérivée à droite, et $f_0(y) \rightarrow 1$.

La dérivée à gauche vaut donc également $\lambda(f_{n-1}(x) - f_n(x))$. Les deux dérivées unilatérales coïncident, ce qui prouve la dérivabilité en x sans la supposer à l'avance.

En 0, la dérivée à droite vaut 0 et $\lambda(f_{n-1}(0) - f_n(0)) = 0$, car $n-1 \geq 1$. Ainsi, sur tout $\mathbb{R}_+$,

$$f'_n(x) = \lambda(f_{n-1}(x) - f_n(x)).$$

5. c) Expression générale

Question adaptée au programme actuel : le PDF demande de dériver $e^{\lambda x} f_0(x)$ dans cette question consacrée à f_n . La fonction pertinente est $e^{\lambda x} f_n(x)$; cette coquille est rectifiée dans le sujet.

Posons $g_n(x) = e^{\lambda x} f_n(x)$. La relation de I.5.b donne

$$g'_n(x) = e^{\lambda x} (\lambda f_n(x) + f'_n(x)) = \lambda e^{\lambda x} f_{n-1}(x).$$

Pour $n = 3$, on connaît $f_2(x) = \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} / 2$. Par conséquent,

$$g'_3(x) = \frac{\lambda^3 x^2}{2}.$$

La fonction $g_3(x) - \lambda^3 x^3 / 6$ a une dérivée nulle sur $]0, +\infty[$; elle est continue en 0 et y vaut 0. On obtient

$$f_3(x) = \frac{\lambda^3 x^3}{6} e^{-\lambda x}.$$

Pour la récurrence générale, supposons

$$f_{n-1}(x) = \frac{\lambda^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}.$$

Alors

$$g'_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La différence $g_n(x) - \lambda^n x^n / n!$ a une dérivée nulle et sa valeur en 0 est 0, puisque $f_n(0) = 0$. Donc

$$f_n(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \quad (x \geq 0).$$

Les cas $n = 0, 1, 2$ ont été établis ; cette récurrence impose la formule à toutes les fonctions de la suite. Pour $n = 0$, la puissance $(\lambda x)^0$ désigne le facteur constant 1, y compris en $x = 0$.

5. d) Vérification de l'existence et conclusion

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, définissons $f_n(x) = e^{-\lambda x} (\lambda x)^n / n!$. Ces fonctions sont dérivables et toutes à valeurs réelles, même lorsque $\lambda < 0$.

Pour $x, y \geq 0$, en utilisant une somme finie et le binôme,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n f_{n-r}(x) f_r(y) &= e^{-\lambda(x+y)} \lambda^n \sum_{r=0}^n \frac{x^{n-r} y^r}{(n-r)! r!} \\ &= e^{-\lambda(x+y)} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r = e^{-\lambda(x+y)} \frac{(\lambda(x+y))^n}{n!} = f_n(x+y). \end{aligned}$$

Ainsi (R_n) est satisfaite pour tout n .

Pour (D_n) , les cas $n = 0$ et $n = 1$ ont déjà été vérifiés. Si $n \geq 2$, on a $f_n(0) = 0$ et

$$\frac{f_n(y) - f_n(0)}{y} = \frac{\lambda^n}{n!} y^{n-1} e^{-\lambda y} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0^+).$$

Donc $f'_n(0) = 0$, comme demandé. Les expressions imposées par les questions précédentes existent bien et sont uniques. La suite entière est ainsi déterminée :

$$f_n(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}, x \geq 0).$$

Partie II

Dans cette partie, $\lambda > 0$. Les variables $N(t_1, t_2)$ prennent des valeurs dans $\mathbb{N}$. Les hypothèses A et B décrivent respectivement l'indépendance sur deux intervalles disjoints et la dépendance de la loi à la seule durée de l'intervalle.

1. Équation fonctionnelle des fonctions p_n

1. a) Probabilité d'absence de client

Pour $x, y \geq 0$, les intervalles $]0, x]$ et $]x, x + y]$ sont disjoints et leur réunion est $]0, x + y]$. Le comptage des clients donne

$$N(0, x + y) = N(0, x) + N(x, x + y).$$

Les deux nombres de clients sont non négatifs; leur somme est nulle si et seulement s'ils sont tous deux nuls. L'hypothèse A permet alors d'écrire

$$P(N(0, x + y) = 0) = P(N(0, x) = 0)P(N(x, x + y) = 0).$$

Par B, $N(x, x + y)$ et $N(0, y)$ ont la même loi, puisque les deux intervalles ont durée y . Ainsi

$$P(N(0, x + y) = 0) = P(N(0, x) = 0)P(N(0, y) = 0),$$

soit $p_0(x + y) = p_0(x)p_0(y)$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, les mêmes égalités restent valables avec le nombre de clients nul sur un intervalle vide.

1. b) Relation générale

Pour $n \geq 0$, l'événement $\{N(0, x + y) = n\}$ est la réunion disjointe des événements

$$\{N(0, x) = n - r\} \cap \{N(x, x + y) = r\}, \quad r = 0, \dots, n.$$

L'additivité du comptage justifie cette décomposition ; la disjonction vient des valeurs différentes du nombre de clients sur le second intervalle. Par A, puis par B,

$$p_n(x + y) = \sum_{r=0}^n P(N(0, x) = n - r)P(N(x, x + y) = r) = \sum_{r=0}^n p_{n-r}(x)p_r(y).$$

C'est exactement la relation (R_n) de la partie I.

2. Dérivabilité en 0 des fonctions p_n

2. a) Développement de la probabilité d'absence de client

Posons $h = t_2 - t_1 \geq 0$. Les trois événements correspondant à 0, 1 et au moins 2 clients forment une partition. D'après C,

$$P(N(t_1, t_2) = 0) = 1 - (\lambda h + h\varepsilon_1(h)) - h\varepsilon(h)$$

$$= 1 - \lambda h + h(-\varepsilon_1(h) - \varepsilon(h)).$$

Il suffit donc de poser $\varepsilon_0(h) = -\varepsilon_1(h) - \varepsilon(h)$. Cette fonction tend vers 0 à droite en 0, par les hypothèses sur les deux termes. On obtient bien

$$P(N(t_1, t_2) = 0) = 1 - \lambda h + h\varepsilon_0(h).$$

La valeur de ε_0 en 0 n'affecte pas l'identité, car elle est multipliée par $h = 0$.

2. b) Développement pour $n \geq 2$

Fixons $n \geq 2$. Pour $h > 0$, définissons

$$\varepsilon_n(h) = \frac{p_n(h)}{h},$$

et posons $\varepsilon_n(0) = 0$. Par inclusion des événements et par C,

$$0 \leq p_n(h) = P(N(0, h) = n) \leq P(N(0, h) \geq 2) = h\varepsilon(h).$$

La dernière égalité montre aussi $\varepsilon(h) \geq 0$ pour $h > 0$. En divisant par ce h strictement positif,

$$0 \leq \varepsilon_n(h) \leq \varepsilon(h).$$

Comme $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement donne $\varepsilon_n(h) \rightarrow 0$. Par B, pour toute durée $h = t_2 - t_1 \geq 0$,

$$P(N(t_1, t_2) = n) = h\varepsilon_n(h).$$

Pour $h = 0$, les deux membres sont nuls par la convention du sujet.

2. c) Développements limités à droite

Les égalités de II.2.a, de C et de II.2.b donnent respectivement

$$p_0(x) = 1 - \lambda x + x\varepsilon_0(x) = 1 - \lambda x + o(x),$$

$$p_1(x) = \lambda x + x\varepsilon_1(x) = \lambda x + o(x),$$

$$p_n(x) = x\varepsilon_n(x) = o(x) \quad (n \geq 2),$$

lorsque $x \rightarrow 0^+$. En effet, chaque fonction ε_j tend vers 0, ce qui signifie précisément que $x\varepsilon_j(x) = o(x)$.

Les valeurs constantes sont cohérentes avec $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$.

2. d) Dérivées à droite en 0

On utilise les quotients différentiels et les valeurs à l'origine. Pour $x > 0$,

$$\frac{p_0(x) - p_0(0)}{x} = -\lambda + \varepsilon_0(x) \rightarrow -\lambda,$$

$$\frac{p_1(x) - p_1(0)}{x} = \lambda + \varepsilon_1(x) \rightarrow \lambda,$$

$$\frac{p_n(x) - p_n(0)}{x} = \varepsilon_n(x) \rightarrow 0 \quad (n \geq 2).$$

Ainsi

$$p'_0(0) = -\lambda, \quad p'_1(0) = \lambda, \quad p'_n(0) = 0 \quad (n \geq 2),$$

avec des dérivées prises à droite, conformément à (D_n) .

3. Loi de $N(t_1, t_2)$

3. a) Vérification des hypothèses de la partie I

Les fonctions p_n sont définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles par B. La relation établie en II.1.b est (R_n) . Les limites calculées en II.2.d assurent l'existence des dérivées à droite en 0 et leurs valeurs sont exactement celles de (D_n) .

Enfin, le paramètre de C satisfait $\lambda > 0$, donc $\lambda \neq 0$, comme requis en partie I. Toutes les hypothèses nécessaires sont donc vérifiées pour appliquer son résultat d'unicité à la famille (p_n) .

3. b) Loi de Poisson et intervalle vide

Question adaptée au programme actuel : on distingue le cas de durée strictement positive du cas d'un intervalle vide, afin de ne pas employer une loi de Poisson usuelle avec un paramètre nul sans préciser la convention.

Par la partie I,

$$p_n(x) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}, x \geq 0).$$

Pour $t_1 < t_2$, posons $h = t_2 - t_1 > 0$ et $\mu = \lambda h > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N(t_1, t_2) = n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}.$$

On reconnaît la loi de Poisson de paramètre $\mu = \lambda(t_2 - t_1)$. Les probabilités sont non négatives et leur somme vaut $e^{-\mu} e^{\mu} = 1$ par la série exponentielle.

Pour $t_1 = t_2$, la durée vaut 0 et $N(t_1, t_1) = 0$ presque sûrement, conformément à la convention initiale. C'est une loi certaine en 0. Dans la formule de p_0 , le facteur $(\lambda x)^0$ vaut 1 ; pour $n \geq 1$, $p_n(0) = 0$.

4. Loi de l'instant d'arrivée du n -ième client

4. a) Égalité des événements

Pour $t \geq 0$, le n -ième client arrive après t si et seulement si, dans l'intervalle $]0, t]$, il est arrivé au plus $n - 1$ clients. Le fait que la borne t soit incluse dans l'intervalle est important : un client arrivant exactement à t est déjà compté.

Les événements sont donc égaux :

$$\{T_n > t\} = \{N(0, t) \leq n - 1\}.$$

D'après II.3.b, on en déduit la formule de survie

$$P(T_n > t) = e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!} \quad (t \geq 0).$$

Pour $t = 0$, la somme vaut 1 et $P(T_n > 0) = 1$. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, chaque terme polynomial multiplié par $e^{-\lambda t}$ tend vers 0, car $\lambda > 0$.

Cette limite confirme que l'attente du n -ième client est finie presque sûrement. Si l'on autorisait initialement une attente infinie, la continuité décroissante des probabilités appliquée aux événements $\{T_n > m\}$ donnerait $P(T_n = +\infty) = 0$.

4. b) Loi du premier instant d'arrivée

Pour $n = 1$, la formule de II.4.a se réduit à $P(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$. Comme T_1 est non négative, sa fonction de répartition est

$$F_{T_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue en 0 et dérivable hors de 0. Une densité est

$$g_1(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

La densité est positive ou nulle et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = 1$. On reconnaît la loi exponentielle de taux λ :

$$T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda).$$

La valeur choisie pour une densité au seul point 0 ne modifie pas la loi.

4. c) Lois de T_2 , T_3 et T_n

Question adaptée au programme actuel : le paramétrage de la loi gamma est précisé par la variable λT_n , qui suit une loi gamma de taux 1, conformément au référentiel fourni. La loi de T_n est ensuite obtenue par une transformation affine.

Pour T_2 , II.4.a donne

$$F_{T_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Pour $t > 0$, on dérive ce produit :

$$F'_{T_2}(t) = \lambda e^{-\lambda t}(1 + \lambda t) - \lambda e^{-\lambda t} = \lambda^2 t e^{-\lambda t}.$$

Une densité est donc $g_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ pour $t > 0$, et 0 pour $t \leq 0$.

Pour T_3 , on obtient

$$F_{T_3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2} \right) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Sur $]0, +\infty[$, la dérivation donne

$$F'_{T_3}(t) = e^{-\lambda t} \left[\lambda \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} \right) - (\lambda + \lambda^2 t) \right] = \frac{\lambda^3 t^2}{2} e^{-\lambda t}.$$

Une densité est donc $g_3(t) = \lambda^3 t^2 e^{-\lambda t} / 2$ pour $t > 0$, et 0 pour $t \leq 0$.

Dans le cas général, pour $n \geq 1$,

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue en 0 : sa valeur à droite vaut $1 - 1 = 0$, égale à sa valeur à gauche. Elle est de classe C^1 sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Pour $n \geq 2$ et $t > 0$, en dérivant la somme finie,

$$F'_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!} - \lambda e^{-\lambda t} \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Pour $n = 1$, on retrouve la même expression par II.4.b. Ainsi une densité de T_n est

$$g_n(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Elle est non négative. La fonction de répartition tend vers 0 à $-\infty$ et vers 1 à $+\infty$; en intégrant sa dérivée sur les intervalles où elle est régulière, on obtient bien une intégrale totale de 1.

Posons $U_n = \lambda T_n$. Comme $\lambda > 0$, $P(U_n \leq u) = F_{T_n}(u/\lambda)$. En dérivant pour $u > 0$, une densité de U_n est

$$h_n(u) = \frac{1}{\lambda} g_n(u/\lambda) = \frac{u^{n-1} e^{-u}}{(n-1)!}.$$

Elle vaut 0 pour $u \leq 0$. Comme $\Gamma(n) = (n-1)!$, on reconnaît la densité gamma de forme n et de taux 1 :

$$\lambda T_n \sim \Gamma(n, 1).$$

La loi de $T_n = U_n/\lambda$ est ainsi la loi gamma de forme n et de taux λ . Ce paramètre est un taux : l'échelle correspondante est $1/\lambda$.

4. d) Espérance et variance de T_n

Méthode 1 — Mise à l'échelle de la loi gamma

D'après II.4.c, $U_n = \lambda T_n$ suit la loi gamma de forme $n > 0$ et de taux 1. Les moments de cette loi existent : par la formule des moments gamma,

$$E(U_n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = n,$$

$$E(U_n^2) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = n(n+1).$$

La relation $\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu)$ justifie ces égalités. Par Huygens,

$$V(U_n) = n(n+1) - n^2 = n.$$

Comme $T_n = U_n/\lambda$ et $\lambda > 0$, ses moments existent également, et

$$E(T_n) = \frac{n}{\lambda}, \quad V(T_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Méthode 2 — Intégrales et intégration par parties

Pour $m \geq 0$, posons $J_m = \int_0^\infty t^m e^{-\lambda t} dt$. On établit la convergence et la valeur de ces intégrales par récurrence, sans procéder directement à une intégration par parties sur un intervalle infini.

D'abord, $J_0 = 1/\lambda$. Pour $m \geq 1$ et $R > 0$, une intégration par parties sur le segment $[0, R]$ donne

$$\int_0^R t^m e^{-\lambda t} dt = -\frac{R^m e^{-\lambda R}}{\lambda} + \frac{m}{\lambda} \int_0^R t^{m-1} e^{-\lambda t} dt.$$

Le terme de bord en 0 est nul puisque $m \geq 1$. Si J_{m-1} est convergente, alors le membre de droite admet une limite finie quand $R \rightarrow +\infty$, car $R^m e^{-\lambda R} \rightarrow 0$ par croissance comparée. On conclut que J_m converge et que

$$J_m = \frac{m}{\lambda} J_{m-1} = \frac{m!}{\lambda^{m+1}}.$$

En utilisant la densité de II.4.c et le transfert, les intégrales positives suivantes sont finies et établissent l'existence des moments :

$$E(T_n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} J_n = \frac{n}{\lambda},$$

$$E(T_n^2) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} J_{n+1} = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}.$$

Ainsi

$$V(T_n) = \frac{n(n+1)}{\lambda^2} - \frac{n^2}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}.$$

La première méthode utilise les moments usuels de la gamma et une transformation affine ; la seconde établit directement les intégrales nécessaires. Pour $n = 1$, elles retrouvent l'espérance $1/\lambda$ et la variance $1/\lambda^2$ de l'exponentielle.

5. Loi du nombre de clients procédant à un achat

Question adaptée au programme actuel : une probabilité individuelle d'achat égale à p ne suffit pas à imposer une loi binomiale conditionnelle. Le sujet précise donc que les décisions sont indépendantes entre clients, de même probabilité p , et indépendantes des arrivées.

Les arguments des variables sont uniformisés en (t_1, t_2) , dans l'ordre chronologique. On fixe $t_1 < t_2$, on pose $\mu = \lambda(t_2 - t_1) > 0$ et l'on abrège

$$N = N(t_1, t_2), \quad A = A(t_1, t_2), \quad B = B(t_1, t_2), \quad q = 1 - p.$$

On a $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $N \sim \mathcal{P}(\mu)$.

5. a) Loi conditionnelle du nombre d'acheteurs

Pour tout $n \geq 0$, $P(N = n) = e^{-\mu} \mu^n / n! > 0$, donc le conditionnement est défini.

Conditionnellement à $N = n$, il y a exactement n clients dans l'intervalle. Leurs décisions restent indépendantes, chacune étant une Bernoulli de paramètre p , car elles sont indépendantes des arrivées.

Pour qu'il y ait exactement k acheteurs, avec $0 \leq k \leq n$, on choisit les k clients acheteurs parmi les n clients. Chaque choix a pour probabilité $p^k q^{n-k}$, et il y a $\binom{n}{k}$ choix disjoints. Ainsi

$$P(A = k \mid N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

La probabilité vaut 0 pour les autres entiers k . La loi conditionnelle est donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Pour $n = 0$, elle est la loi certaine en 0.

5. b) Loi et espérance du nombre d'acheteurs

Pour $k \in \mathbb{N}$, on applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(\{N = n\})_{n \geq 0}$. Comme $A \leq N$, les termes avec $n < k$ sont nuls :

$$P(A = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}.$$

Toutes les séries considérées sont à termes positifs ; les simplifications et le changement d'indice $r = n - k$ donnent

$$P(A = k) = e^{-\mu} \frac{(\mu p)^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\mu q)^r}{r!} = e^{-\mu} e^{\mu q} \frac{(\mu p)^k}{k!} = e^{-\mu p} \frac{(\mu p)^k}{k!}.$$

La série exponentielle assure la convergence du calcul. On reconnaît

$$A \sim \mathcal{P}(\mu p) = \mathcal{P}(\lambda p(t_2 - t_1)).$$

Pour l'espérance, deux méthodes sont naturelles.

Méthode 1 — Moment de la loi obtenue

Le paramètre μp est strictement positif. Une variable de Poisson de ce paramètre est intégrable et son espérance vaut ce paramètre. Donc

$$E(A) = \mu p = \lambda p(t_2 - t_1).$$

Méthode 2 — Espérance totale

La domination $0 \leq A \leq N$ et l'intégrabilité de N montrent d'abord que A est intégrable. Par II.5.a, $E(A \mid N = n) = np$. La formule de l'espérance totale, dans ce cadre discret, donne

$$E(A) = \sum_{n=0}^{\infty} np P(N = n) = pE(N) = p\mu.$$

La première méthode lit l'espérance dans la loi marginale ; la seconde permet de la calculer sans avoir préalablement déterminé cette loi.

5. c) Loi du nombre de non-acheteurs

Conditionnellement à $N = n$, les n décisions de non-achat sont indépendantes, chacune ayant la probabilité $q = 1 - p$. Ainsi B a, sous cette condition, la loi $\mathcal{B}(n, q)$.

Pour $r \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales donne

$$P(B = r) = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n}{r} q^r p^{n-r} e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!}.$$

En posant $s = n - r$ et en utilisant la série exponentielle,

$$P(B = r) = e^{-\mu} \frac{(\mu q)^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\mu p)^s}{s!} = e^{-\mu q} \frac{(\mu q)^r}{r!}.$$

Donc

$$B \sim \mathcal{P}(\mu(1-p)) = \mathcal{P}(\lambda(1-p)(t_2 - t_1)).$$

En particulier, $E(B) = \mu(1-p)$, et $E(A) + E(B) = \mu = E(N)$, conformément à $A + B = N$.

5. d) Indépendance de A et B

On démontre l'indépendance par factorisation des probabilités ponctuelles de la loi jointe, critère valable pour deux variables discrètes.

Pour $k, r \in \mathbb{N}$, puisque $A + B = N$, l'événement $\{A = k, B = r\}$ est exactement $\{A = k, N = k + r\}$. Ainsi

$$\begin{aligned} P(A = k, B = r) &= P(N = k + r)P(A = k \mid N = k + r) \\ &= e^{-\mu} \frac{\mu^{k+r}}{(k+r)!} \binom{k+r}{k} p^k q^r = e^{-\mu} \frac{(\mu p)^k}{k!} \frac{(\mu q)^r}{r!}. \end{aligned}$$

Or $\mu = \mu p + \mu q$, d'où

$$P(A = k, B = r) = \left(e^{-\mu p} \frac{(\mu p)^k}{k!} \right) \left(e^{-\mu q} \frac{(\mu q)^r}{r!} \right) = P(A = k)P(B = r).$$

La factorisation vaut pour tous les entiers non négatifs ; les probabilités sont nulles hors de ces supports. Par conséquent, $A(t_1, t_2)$ et $B(t_1, t_2)$ sont indépendantes.

Cette indépendance concerne les variables non conditionnées. Si l'on fixe le total $N = n \geq 1$, on a en revanche $B = n - A$: les deux comptes ne sont alors pas indépendants, puisque leur covariance conditionnelle vaut $-V(A \mid N = n) = -np(1 - p) \neq 0$. Le mélange par un total de Poisson est essentiel à la factorisation obtenue.

Relevé des adaptations

- I.2.b, I.3.c, I.4.c et I.5.b : le sens de « dérivable sur $\mathbb{R}_+$ » est précisé dans le préambule : dérivabilité sur l'intervalle ouvert positif et dérivabilité à droite en 0.
- I.5.c : la coquille $e^{\lambda x} f_0(x)$ est rectifiée en $e^{\lambda x} f_n(x)$, expression nécessaire pour déterminer la fonction d'indice n .
- II.3.b : distinction explicite entre la loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1) > 0$ et la loi certaine en 0 pour $t_1 = t_2$.
- II.4.c : la loi gamma à taux λ est reliée explicitement à la loi gamma de taux 1 du référentiel par $\lambda T_n \sim \Gamma(n, 1)$; les fonctions de répartition et les densités demandées sont conservées.
- II.5.a à II.5.d : ajout de l'indépendance des décisions d'achat entre clients et vis-à-vis des arrivées, hypothèse indispensable à la loi binomiale conditionnelle et aux conclusions suivantes. La seule probabilité individuelle p mentionnée dans le PDF ne suffisait pas.
- II.5.a à II.5.d : arguments des variables A , B et N uniformisés en (t_1, t_2) , dans l'ordre chronologique, afin de rectifier les inversions et incohérences du PDF.
- II.5.a : précision $t_1 < t_2$ pour que tous les événements $\{N(t_1, t_2) = n\}$ aient une probabilité non nulle et que le conditionnement soit défini pour chaque n .