



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1994

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

1. Étude de suites récurrentes linéaires

I.1.a) On considère l'ensemble S des suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant, pour tout entier $n \geq 1$,

$$9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0. \quad (1)$$

Établir que S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

I.1.b) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.

I.1.c) Déterminer les suites géométriques non nulles $(r^n)_{n \geq 1}$ appartenant à S .

I.1.d) On considère une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ appartenant à S .

Exprimer en fonction de u_1, u_2, u_3 trois nombres réels α, β, γ tels que

$$\begin{cases} u_1 = \alpha + \frac{\sqrt{7}}{3}\beta - \frac{\sqrt{7}}{3}\gamma, \\ u_2 = \alpha + \frac{7}{9}\beta + \frac{7}{9}\gamma, \\ u_3 = \alpha + \frac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \frac{7\sqrt{7}}{27}\gamma. \end{cases}$$

On formera $9u_3 - 7u_1$. On donnera les expressions exactes de α, β, γ .

On associe à la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n = u_n - \alpha - \beta \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n - \gamma \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n.$$

Établir qu'elle appartient à S et en déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = 0$.

Exprimer enfin u_n en fonction de n .

I.1.e) En déduire que les trois suites obtenues en I.1.c forment une base de l'espace vectoriel S .

2. Étude des puissances d'une matrice

On étudie la suite des puissances d'une matrice réelle d'ordre 4 notée M et satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0, \quad (2)$$

les matrices M, M^2, M^3 sont linéairement indépendantes. (3)

I.2.a) On se propose d'établir, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'existence et l'unicité de trois nombres réels a_n, b_n, c_n tels que

$$M^n = a_n M + b_n M^2 + c_n M^3. \quad (4)$$

Établir, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'unicité des réels a_n, b_n, c_n , s'ils existent.

Déterminer a_n, b_n, c_n pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Établir par récurrence l'existence de a_n, b_n, c_n dans le cas général. On explicitera $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n, c_n .

I.2.b) Vérifier par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n + b_n + c_n = 1$.

I.2.c) En multipliant par M^{n-1} la relation (2), établir que les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ vérifient la relation (1).

I.2.d) En appliquant à la suite (b_n) les résultats obtenus à la question I.1, établir, pour tout entier $n \geq 1$, la formule

$$b_n = \frac{9}{14} \left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n \right].$$

Déterminer de même les expressions de a_n et c_n .

3. Étude d'un cas particulier

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) . On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = \frac{e_1}{3} + \frac{2e_3}{3}, \quad f(e_3) = \frac{2e_2}{3} + \frac{e_4}{3}, \quad f(e_4) = e_4.$$

I.3.a) Écrire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) , calculer A^2, A^3, A^4 , puis prouver que la matrice A satisfait aux conditions (2) et (3). Ainsi,

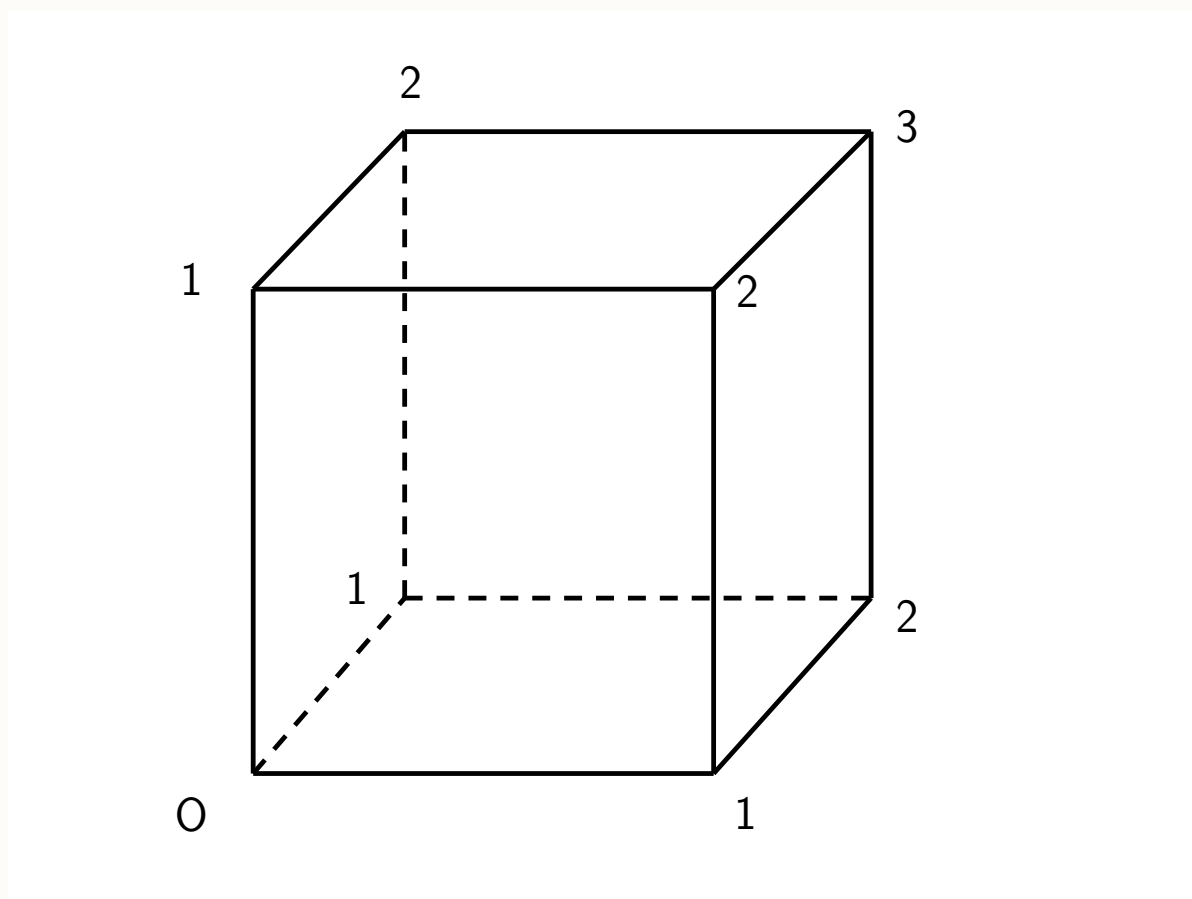
$$A^n = a_n A + b_n A^2 + c_n A^3 \quad (n \geq 1).$$

I.3.b) Écrire la matrice B de f dans la base (e_4, e_3, e_2, e_1) et montrer que

$$B^n = a_n B + b_n B^2 + c_n B^3 \quad (n \geq 1).$$

Partie II

On considère un cube dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 selon qu'ils sont situés à une, deux ou trois arêtes du sommet O . Le sommet O porte le numéro 0.



Il y a trois sommets de numéro 1, trois de numéro 2 et un de numéro 3 ; celui-ci est opposé à O .

A]

On considère le mouvement d'un point P , situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets selon les deux règles suivantes.

A1) Lorsque le point P atteint à l'instant n un sommet S autre que le sommet 3, il se situe à l'instant $n + 1$, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.

A2) Lorsque le point P atteint le sommet 3, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n , on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n ; en particulier, $X_0 = 0$.

On désigne par T , s'il existe, l'instant, nécessairement impair et supérieur ou égal à 3, où, pour la première fois, le point atteint le sommet 3.

1. Lois des variables aléatoires X_n

Pour tout entier naturel n , on note U_n le vecteur-colonne dont les composantes sont, de haut en bas,

$$P(X_n = 0), \quad P(X_n = 1), \quad P(X_n = 2), \quad P(X_n = 3).$$

II.A.1.a) Expliciter U_0, U_1, U_2 .

II.A.1.b) Exprimer, pour $i = 0, 1, 2, 3$, la probabilité $P(X_{n+1} = i)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3)$.

En déduire une matrice M d'ordre 4 telle que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$U_{n+1} = MU_n.$$

II.A.1.c) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer U_n en fonction de M^n et U_0 , et en déduire l'expression du vecteur U_n et de la loi de X_n en fonction des réels a_n, b_n, c_n définis à la partie I.

2. Loi de la variable aléatoire T

II.A.2.a) Comparer les événements $\{X_{2n} = 2, X_{2n+1} = 3\}$ et $\{T = 2n + 1\}$. En déduire la probabilité de l'événement $\{T = 2n + 1\}$.

II.A.2.b) Vérifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n + 1) = 1.$$

II.A.2.c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire T .

B]

On considère maintenant le mouvement d'un point P , situé au sommet O du cube à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets selon les deux règles suivantes.

B1) Le point P est à l'instant 1 sur l'un des trois sommets du cube reliés à O par une arête. Puis, lorsqu'il atteint à l'instant $n \geq 1$ un sommet S autre que O , il se situe à l'instant $n + 1$, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.

B2) Lorsque le point P revient au sommet O du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n , on désigne par Y_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n ; en particulier, $Y_1 = 1$.

On désigne par R , s'il existe, l'instant, nécessairement pair et supérieur ou égal à 2, où, pour la première fois, le point revient au sommet O .

1. Loïs des variables aléatoires Y_n

Pour tout entier naturel n , on note V_n le vecteur-colonne dont les composantes sont, de haut en bas,

$$P(Y_n = 0), \quad P(Y_n = 1), \quad P(Y_n = 2), \quad P(Y_n = 3).$$

II.B.1.a) Déterminer une matrice M d'ordre 4 telle que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$V_{n+1} = MV_n.$$

II.B.1.b) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer V_n en fonction de M^{n-1} et V_1 . Pour $n \geq 2$, en déduire l'expression de V_n et de la loi de Y_n en fonction des réels $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ définis à la partie I. Traiter séparément le cas $n = 1$.

2. Loi de la variable aléatoire R

II.B.2.a) Comparer, pour $n \geq 1$, les événements $\{Y_{2n-1} = 1, Y_{2n} = 0\}$ et $\{R = 2n\}$. En déduire la probabilité de l'événement $\{R = 2n\}$.

II.B.2.b) Vérifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(R = 2n) = 1.$$

II.B.2.c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire R .
