



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1994

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I

1. Étude de suites récurrentes linéaires

I.1.a)

On travaille dans l'espace vectoriel réel des suites indexées par les entiers strictement positifs. La suite nulle vérifie (1), donc S est non vide.

Si $u = (u_n)$ et $w = (w_n)$ appartiennent à S , et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, posons $z_n = \lambda u_n + \mu w_n$. Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} 9z_{n+3} - 9z_{n+2} - 7z_{n+1} + 7z_n &= \lambda(9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n) \\ &+ \mu(9w_{n+3} - 9w_{n+2} - 7w_{n+1} + 7w_n) = 0. \end{aligned}$$

La suite z appartient donc à S . La non-vacuité et la stabilité par combinaison linéaire établissent que S est un sous-espace vectoriel.

I.1.b)

On factorise par regroupement :

$$9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = (x - 1)(9x^2 - 7).$$

L'équation équivaut donc à $x = 1$ ou $x^2 = 7/9$. Ses trois solutions réelles, distinctes, sont

$$1, \quad \frac{\sqrt{7}}{3}, \quad -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Dans la suite du corrigé, on note $\rho = \sqrt{7}/3$ et $q = \rho^2 = 7/9$. On a $0 < \rho < 1$ et $0 < q < 1$.

I.1.c)

Pour la suite $(r^n)_{n \geq 1}$, le membre de gauche de (1) vaut

$$r^n(9r^3 - 9r^2 - 7r + 7).$$

La suite étant non nulle, $r \neq 0$; on peut donc diviser par r^n . Elle appartient à S si et seulement si r est l'une des racines de I.1.b.

Les trois suites demandées sont donc $(1)_{n \geq 1}$, $(\rho^n)_{n \geq 1}$ et $((-\rho)^n)_{n \geq 1}$.

I.1.d)

Question adaptée au programme actuel : rectification d'un signe dans la définition de v_n . Le dernier terme est $-\gamma(-\sqrt{7}/3)^n$; dans le PDF, la base de cette dernière puissance est écrite positive, ce qui n'est pas cohérent avec le système initial.

Méthode 1 — Identification des trois premiers termes puis récurrence

On suit l'indication de l'énoncé. En multipliant la troisième équation du système par 9 et la première par 7, puis en soustrayant, les termes en β et γ se compensent. On obtient

$$9u_3 - 7u_1 = 2\alpha, \quad \alpha = \frac{9u_3 - 7u_1}{2}.$$

La deuxième et la première équation donnent ensuite

$$\beta + \gamma = \frac{9}{7}(u_2 - \alpha), \quad \beta - \gamma = \frac{3}{\sqrt{7}}(u_1 - \alpha).$$

Par somme et différence,

$$\beta = \frac{9}{14}(u_2 - \alpha) + \frac{3}{2\sqrt{7}}(u_1 - \alpha), \quad \gamma = \frac{9}{14}(u_2 - \alpha) - \frac{3}{2\sqrt{7}}(u_1 - \alpha).$$

En remplaçant α , les expressions exactes en fonction des seuls termes initiaux sont

$$\alpha = \frac{9u_3 - 7u_1}{2},$$

$$\beta = \frac{9}{28}(2u_2 - 9u_3 + 7u_1) + \frac{27}{4\sqrt{7}}(u_1 - u_3),$$

$$\gamma = \frac{9}{28}(2u_2 - 9u_3 + 7u_1) - \frac{27}{4\sqrt{7}}(u_1 - u_3).$$

Ces étapes sont réversibles : les valeurs obtenues vérifient bien les trois équations. Elles prouvent aussi l'unicité du triplet.

Par I.1.c, les suites (1) , (ρ^n) et $((-\rho)^n)$ appartiennent à S . La stabilité démontrée en I.1.a assure donc que la suite

$$v_n = u_n - \alpha - \beta\rho^n - \gamma(-\rho)^n$$

appartient à S . Le système initial donne $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. La relation (1) s'écrit

$$v_{n+3} = v_{n+2} + \frac{7}{9}v_{n+1} - \frac{7}{9}v_n.$$

Si trois termes consécutifs sont nuls, le suivant est nul. Une récurrence à partir de v_1, v_2, v_3 montre donc que $v_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \alpha + \beta\rho^n + \gamma(-\rho)^n,$$

avec les trois coefficients explicités ci-dessus. Cette preuve ne suppose aucune théorie générale des récurrences d'ordre trois.

Méthode 2 — Réduction à une récurrence d'ordre deux par différences

Pour $n \geq 1$, posons $d_n = u_{n+1} - u_n$. La relation (1) devient

$$9(u_{n+3} - u_{n+2}) - 7(u_{n+1} - u_n) = 0,$$

soit $d_{n+2} = q d_n$. C'est une récurrence linéaire d'ordre deux dont les deux racines réelles distinctes sont ρ et $-\rho$. Le résultat du cours pour ce type de récurrence donne

$$d_n = K\rho^n + L(-\rho)^n.$$

Les constantes sont déterminées par $d_1 = u_2 - u_1$ et $d_2 = u_3 - u_2$:

$$K + L = \frac{d_2}{q}, \quad K - L = \frac{d_1}{\rho},$$

d'où $K = \frac{1}{2}(d_2/q + d_1/\rho)$ et $L = \frac{1}{2}(d_2/q - d_1/\rho)$.

Puisque $\rho \neq 1$ et $-\rho \neq 1$, on peut poser $\beta = K/(\rho - 1)$ et $\gamma = L/(-\rho - 1)$. La suite $w_n = \beta\rho^n + \gamma(-\rho)^n$ vérifie

$$w_{n+1} - w_n = K\rho^n + L(-\rho)^n = d_n = u_{n+1} - u_n.$$

Ainsi $u_n - w_n$ a toutes ses différences nulles : c'est une constante $\alpha = u_1 - w_1$. On retrouve $u_n = \alpha + \beta\rho^n + \gamma(-\rho)^n$. En prenant $n = 1, 2, 3$, le triplet vérifie le système initial et coïncide donc, par son unicité déjà établie, avec les expressions exactes de la première méthode.

La première méthode exploite les trois suites candidates de l'énoncé ; la seconde explique pourquoi une récurrence d'ordre deux apparaît après une différence.

I.1.e)

La formule de I.1.d montre que les trois suites (1) , (ρ^n) , $((-\rho)^n)$ engendrent S .

Méthode 1 — Liberté par les trois coordonnées initiales

Pour la liberté, supposons $\alpha + \beta\rho^n + \gamma(-\rho)^n = 0$ pour tout $n \geq 1$. En prenant $n = 1, 2, 3$, on obtient le système de I.1.d avec $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Les expressions de cette question imposent successivement $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

La famille est donc libre et génératrice : c'est une base de S , et $\dim(S) = 3$.

Méthode 2 — Liberté par la limite et les deux parités

Supposons à nouveau $\alpha + \beta\rho^n + \gamma(-\rho)^n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Comme $0 < \rho < 1$, les deux puissances tendent vers zéro ; le passage à la limite donne $\alpha = 0$. Pour un indice pair, la division par $\rho^n > 0$ donne $\beta + \gamma = 0$. Pour un indice impair, elle donne $\beta - \gamma = 0$. Donc $\beta = \gamma = 0$.

Cette deuxième preuve établit également la liberté. Avec la propriété génératrice déjà démontrée, elle donne la même base et la même dimension. La première preuve utilise uniquement les trois termes initiaux ; la seconde distingue la composante constante des deux composantes décroissantes, puis sépare les parités.

2. Étude des puissances d'une matrice

I.2.a)

Unicité : si deux triplets donnent la même expression de M^n , leur différence donne une combinaison linéaire nulle des matrices M, M^2, M^3 . La condition (3) impose que les trois coefficients de cette différence soient nuls. Le triplet, s'il existe, est unique.

Pour les quatre premiers indices, on lit les trois premières expressions et on utilise (2) pour la quatrième :

$$M^4 = M^3 + \frac{7}{9}M^2 - \frac{7}{9}M.$$

n	a_n	b_n	c_n
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	$-7/9$	$7/9$	1

Pour l'existence générale, l'initialisation en $n = 1$ est acquise. Supposons que $M^n = a_n M + b_n M^2 + c_n M^3$. En multipliant par M et en remplaçant M^4 par l'expression précédente,

$$M^{n+1} = a_n M^2 + b_n M^3 + c_n \left(M^3 + \frac{7}{9}M^2 - \frac{7}{9}M \right).$$

Ainsi le triplet au rang suivant existe et vérifie

$$a_{n+1} = -\frac{7}{9}c_n, \quad b_{n+1} = a_n + \frac{7}{9}c_n, \quad c_{n+1} = b_n + c_n.$$

La récurrence établit l'existence pour tout $n \geq 1$; la première partie de la preuve assure son unicité.

I.2.b)

Au rang 1, $a_1 + b_1 + c_1 = 1$. Les relations de I.2.a donnent

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = -\frac{7}{9}c_n + a_n + \frac{7}{9}c_n + b_n + c_n = a_n + b_n + c_n.$$

La somme est donc conservée d'un rang au suivant. Par récurrence, $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.

I.2.c)

Pour $n \geq 1$, on multiplie (2) par M^{n-1} , ce qui donne

$$9M^{n+3} - 9M^{n+2} - 7M^{n+1} + 7M^n = 0.$$

En utilisant (4) pour chacune des quatre puissances, le coefficient de M est $9a_{n+3} - 9a_{n+2} - 7a_{n+1} + 7a_n$. Les coefficients de M^2 et M^3 sont les mêmes expressions avec respectivement b et c à la place de a .

L'indépendance de M, M^2, M^3 impose l'annulation de chacun des trois coefficients. Les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) satisfont donc toutes la relation (1) et appartiennent à S .

I.2.d)

On applique la formule de I.1.d aux termes initiaux de chacune des trois suites. Pour simplifier l'écriture, posons, pour $n \geq 1$,

$$s_n = \rho^n + (-\rho)^n, \quad t_n = \rho^n - (-\rho)^n.$$

Pour (b_n) , les premiers termes sont $(b_1, b_2, b_3) = (0, 1, 0)$. On obtient $\alpha_b = 0$, $\beta_b = \gamma_b = 9/14$. Par conséquent,

$$b_n = \frac{9}{14}s_n = \frac{9}{14} \left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3} \right)^n \right].$$

Pour (a_n) , les premiers termes sont $(1, 0, 0)$. Les mêmes expressions donnent

$$\alpha_a = -\frac{7}{2}, \quad \beta_a = \frac{9}{4} + \frac{27}{4\sqrt{7}}, \quad \gamma_a = \frac{9}{4} - \frac{27}{4\sqrt{7}}.$$

Ainsi,

$$a_n = -\frac{7}{2} + \frac{9}{4}s_n + \frac{27}{4\sqrt{7}}t_n.$$

Pour (c_n) , les premiers termes sont $(0, 0, 1)$. On obtient

$$\alpha_c = \frac{9}{2}, \quad \beta_c = -\frac{81}{28} - \frac{27}{4\sqrt{7}}, \quad \gamma_c = -\frac{81}{28} + \frac{27}{4\sqrt{7}}.$$

Donc,

$$c_n = \frac{9}{2} - \frac{81}{28}s_n - \frac{27}{4\sqrt{7}}t_n.$$

Ces trois formules valent pour tout $n \geq 1$. Leur somme est bien 1, car les coefficients de t_n se compensent et ceux de s_n donnent $9/4 + 9/14 - 81/28 = 0$.

Pour la partie probabiliste, on relève les simplifications suivantes. Pour $k \geq 1$,

$$b_{2k} = q^{k-1}, \quad c_{2k} = \frac{9}{2}(1 - q^{k-1}),$$

car $s_{2k} = 2q^k$ et $t_{2k} = 0$. Pour $k \geq 0$,

$$b_{2k+1} = 0, \quad c_{2k+1} = \frac{9}{2}(1 - q^k),$$

car $s_{2k+1} = 0$ et $t_{2k+1} = 2\rho q^k$. Ces identités incluent les indices 1 et 2.

3. Étude d'un cas particulier

I.3.a)

Les colonnes de la matrice sont les coordonnées des images des vecteurs de la base canonique. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour détailler les multiplications, si une matrice C a pour colonnes C_1, C_2, C_3, C_4 , les colonnes du produit CA sont

$$C_2, \quad \frac{1}{3}C_1 + \frac{2}{3}C_3, \quad \frac{2}{3}C_2 + \frac{1}{3}C_4, \quad C_4.$$

En appliquant successivement cette règle à $C = A$, puis à $C = A^2$ et à $C = A^3$, on obtient

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 7/9 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 2/9 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7/27 & 0 & 0 \\ 7/9 & 0 & 14/27 & 0 \\ 0 & 14/27 & 0 & 0 \\ 2/9 & 2/9 & 13/27 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 7/27 & 0 & 14/81 & 0 \\ 0 & 49/81 & 0 & 0 \\ 14/27 & 0 & 28/81 & 0 \\ 2/9 & 32/81 & 13/27 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la première colonne de A^3 est la deuxième colonne de A^2 , soit ${}^t(0, 7/9, 0, 2/9)$. La deuxième colonne de A^4 est le tiers de la première colonne de A^3 plus les deux tiers de sa troisième colonne, soit ${}^t(0, 49/81, 0, 32/81)$. La règle donne de la même façon toutes les entrées affichées.

Pour vérifier (2), on calcule directement

$$A^3 + \frac{7}{9}A^2 - \frac{7}{9}A = \begin{pmatrix} 7/27 & 0 & 14/81 & 0 \\ 0 & 49/81 & 0 & 0 \\ 14/27 & 0 & 28/81 & 0 \\ 2/9 & 32/81 & 13/27 & 1 \end{pmatrix} = A^4.$$

Après multiplication par 9, c'est bien $9A^4 - 9A^3 - 7A^2 + 7A = 0$.

Pour (3), supposons $xA + yA^2 + zA^3 = 0$. L'entrée de ligne 1, colonne 1, donne $y/3 = 0$, donc $y = 0$. L'entrée de ligne 4, colonne 1, donne alors $2z/9 = 0$, donc $z = 0$. Enfin, l'entrée de ligne 2, colonne 1, donne $x = 0$.

Ainsi A, A^2, A^3 sont linéairement indépendantes. Les deux conditions de I.2 étant vérifiées, on peut conclure, pour tout $n \geq 1$,

$$A^n = a_n A + b_n A^2 + c_n A^3.$$

I.3.b)

Dans la base $\mathcal{C} = (e_4, e_3, e_2, e_1)$, les images des quatre vecteurs successifs sont e_4 , $e_4/3 + 2e_2/3$, $2e_3/3 + e_1/3$ et e_2 . On obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Méthode 1 — Matrice de passage

La matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées de $\mathcal{C}$ dans la base canonique est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $J^2 = I_4$, elle est inversible et $J^{-1} = J$. La formule de changement de base donne $B = JAJ$. Par récurrence et simplification des facteurs J^2 , $B^n = JA^nJ$ pour tout $n \geq 1$. En utilisant I.3.a,

$$B^n = J(a_n A + b_n A^2 + c_n A^3)J = a_n B + b_n B^2 + c_n B^3.$$

Méthode 2 — Identité d'endomorphismes indépendante de la base

L'identité matricielle de I.3.a exprime, dans la base canonique, l'identité d'endomorphismes

$$f^n = a_n f + b_n f^2 + c_n f^3.$$

En prenant les matrices des deux membres dans la base $\mathcal{C}$, la linéarité de la représentation matricielle et la correspondance entre composition et produit donnent directement

$$B^n = a_n B + b_n B^2 + c_n B^3.$$

La première méthode explicite la similitude ; la seconde utilise le fait qu'une égalité entre applications linéaires reste vraie quelle que soit la base choisie.

Partie II

Les numéros des sommets indiquent leur distance à O , comptée en nombre minimal d'arêtes. Ils ne sont pas des identifiants distincts des huit sommets : il existe trois sommets de numéro 1 et trois de numéro 2.

Depuis un sommet de numéro 0, les trois voisins portent le numéro 1. Depuis un sommet de numéro 1, un voisin porte le numéro 0 et deux portent le numéro 2. Depuis un sommet de numéro 2, deux voisins portent le numéro 1 et un porte le numéro 3. Depuis le sommet de numéro 3, les trois voisins portent le numéro 2.

Ces nombres de voisins sont les mêmes pour tous les sommets portant un même numéro ; on peut donc calculer les lois des numéros sans distinguer les sommets individuels. Jusqu'à l'absorption, la parité du numéro change à chaque déplacement.

A] Absorption au sommet opposé à O

1. Lois des variables aléatoires X_n

II.A.1.a)

À l'instant 0, $X_0 = 0$ sûrement. À l'instant 1, tout déplacement conduit à un sommet de numéro 1. À l'instant 2, on revient à O avec probabilité $1/3$ et on atteint un sommet de numéro 2 avec probabilité $2/3$.

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II.A.1.b)

On utilise le système complet d'événements $\{X_n = j\}$, $j = 0, 1, 2, 3$, et les probabilités de transition données par les nombres de voisins. Si l'un de ces événements a une probabilité nulle, sa contribution est nulle ; il n'est pas nécessaire de définir une probabilité conditionnelle sur cet événement.

En tenant compte de l'absorption en 3, la formule des probabilités totales donne

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{3}P(X_n = 1),$$

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) + \frac{2}{3}P(X_n = 2),$$

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{2}{3}P(X_n = 1),$$

$$P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}P(X_n = 2) + P(X_n = 3).$$

La matrice de transition pour les vecteurs-colonnes est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Les colonnes correspondent au numéro de départ et les lignes au numéro d'arrivée. On a bien $U_{n+1} = AU_n$ pour tout $n \geq 0$.

II.A.1.c)

Une récurrence sur n , à partir de $U_{n+1} = AU_n$, donne $U_n = A^n U_0$ pour tout $n \geq 0$, avec $A^0 = I_4$. Pour $n \geq 1$, l'identité de I.3.a s'applique.

Les premières colonnes de A, A^2, A^3 donnent

$$AU_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2U_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^3U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/9 \\ 0 \\ 2/9 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$U_n = \begin{pmatrix} b_n/3 \\ a_n + 7c_n/9 \\ 2b_n/3 \\ 2c_n/9 \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

C'est la loi demandée : les quatre composantes sont respectivement les probabilités des valeurs 0, 1, 2, 3. Leur somme vaut $a_n + b_n + c_n = 1$.

Les formules de I.2.d permettent une expression plus simple selon la parité. Pour $k \geq 1$, on a $b_{2k} = q^{k-1}$, $c_{2k} = 9(1 - q^{k-1})/2$, puis $a_{2k} + 7c_{2k}/9 = 1 - b_{2k} - 2c_{2k}/9 = 0$. Ainsi,

$$U_{2k} = \begin{pmatrix} q^{k-1}/3 \\ 0 \\ 2q^{k-1}/3 \\ 1 - q^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $k \geq 0$, $b_{2k+1} = 0$, $c_{2k+1} = 9(1 - q^k)/2$, puis $a_{2k+1} + 7c_{2k+1}/9 = 1 - 2c_{2k+1}/9 = q^k$. Par conséquent,

$$U_{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ q^k \\ 0 \\ 1 - q^k \end{pmatrix}.$$

Toutes les probabilités sont positives ou nulles puisque $0 < q < 1$. Avant l'absorption, seuls les numéros de même parité que l'instant peuvent apparaître ; une fois absorbé, le

point conserve le numéro 3 à tous les instants.

2. Loi de la variable aléatoire T

II.A.2.a)

Méthode 1 — Égalité des événements et transition finale

Pour $n \geq 1$, si $X_{2n} = 2$ et $X_{2n+1} = 3$, le sommet 3 n'a pas été atteint avant l'instant $2n + 1$: sinon l'absorption imposerait déjà $X_{2n} = 3$. Réciproquement, pour atteindre 3 pour la première fois à l'instant $2n + 1$, il faut être à l'instant précédent sur un sommet voisin de 3, donc de numéro 2.

Les deux événements sont donc égaux :

$$\{X_{2n} = 2, X_{2n+1} = 3\} = \{T = 2n + 1\}.$$

Conditionnellement à un sommet de numéro 2, un seul des trois voisins porte le numéro 3. Par la loi de X_{2n} ,

$$P(T = 2n + 1) = \frac{1}{3}P(X_{2n} = 2) = \frac{2}{9}q^{n-1} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Avant l'absorption, le numéro change de parité à chaque pas. Partant du numéro 0, on ne peut donc atteindre le numéro 3 qu'à un instant impair, et il faut au moins trois pas. Tous les autres instants ont une probabilité de premier passage nulle.

Méthode 2 — Accroissement de la probabilité d'absorption

L'absorption en 3 donne l'inclusion $\{X_{2n} = 3\} \subset \{X_{2n+1} = 3\}$. La différence de ces événements est précisément le premier passage à l'instant $2n + 1$. Par la loi des positions, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(T = 2n + 1) &= P(X_{2n+1} = 3) - P(X_{2n} = 3) = (1 - q^n) - (1 - q^{n-1}) = (1 - q)q^{n-1} \\ &= \frac{2}{9}q^{n-1}. \end{aligned}$$

La première méthode identifie la position juste avant le passage ; la seconde utilise la croissance de la probabilité d'être déjà absorbé.

II.A.2.b)

Méthode 1 — Somme d'une série géométrique

Comme $0 < q = 7/9 < 1$, la série géométrique converge. On calcule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n + 1) = \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{2/9}{1 - q} = 1.$$

Les événements de premier passage sont disjoints. Leur réunion a donc une probabilité égale à 1 : le sommet 3 est atteint presque sûrement, et T est bien défini presque sûrement. On peut lui donner arbitrairement une valeur autorisée, par exemple 3, sur l'éventuel événement négligeable de non-atteinte, sans modifier sa loi.

Méthode 2 — Probabilité de survie et continuité monotone

L'absorption implique que ne pas avoir encore atteint 3 à l'instant $2n + 1$ équivaut à $X_{2n+1} \neq 3$. D'après II.A.1.c, cette probabilité vaut q^n .

Les événements « 3 n'est pas atteint avant l'instant $2n + 1$ » décroissent avec n ; leur intersection est l'événement de non-atteinte. La continuité monotone des probabilités donne à cet événement la probabilité $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Ainsi le passage est presque sûr. La somme des probabilités des événements disjoints de premier passage vaut donc 1, comme demandé.

La première méthode vérifie directement la normalisation de la loi ; la seconde déduit l'atteinte presque sûre de la disparition de la probabilité de survie.

II.A.2.c)

Méthode 1 — Calcul direct de la série d'espérance

Les termes de la série d'espérance sont positifs. Les séries géométrique et géométrique dérivée convergent puisque $0 < q < 1$, donc T admet une espérance finie. On utilise

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Alors,

$$E(T) = \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)q^{n-1} = \frac{2}{9} \left(\frac{2}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q} \right).$$

Comme $1 - q = 2/9$, cela donne

$$E(T) = \frac{2}{9} \left(\frac{81}{2} + \frac{9}{2} \right) = 10.$$

Méthode 2 — Transformation en variable géométrique

Posons $G = (T - 1)/2$. Puisque T prend presque sûrement les valeurs 3, 5, 7, ..., G prend les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Pour $n \geq 1$,

$$P(G = n) = P(T = 2n + 1) = \frac{2}{9} \left(1 - \frac{2}{9} \right)^{n-1}.$$

Ainsi G suit une loi géométrique de paramètre $2/9$, et $E(G) = 9/2$ existe. L'identité $T = 2G + 1$ et la linéarité de l'espérance donnent $E(T) = 2 \times 9/2 + 1 = 10$.

Le calcul direct vérifie la série de moments ; la transformation reconnaît une loi usuelle et explique les instants espacés de deux pas.

B] Absorption au premier retour à O

1. Lois des variables aléatoires Y_n

II.B.1.a)

À partir de l'instant 1, le numéro 0 est absorbant. Depuis le numéro 1, on passe au numéro 0 avec probabilité $1/3$ et au numéro 2 avec probabilité $2/3$. Depuis le numéro 2, on passe au numéro 1 avec probabilité $2/3$ et au numéro 3 avec probabilité $1/3$. Depuis le numéro 3, on passe nécessairement au numéro 2.

En appliquant les probabilités totales aux numéros de départ,

$$P(Y_{n+1} = 0) = P(Y_n = 0) + \frac{1}{3}P(Y_n = 1),$$

$$P(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}P(Y_n = 2),$$

$$P(Y_{n+1} = 2) = \frac{2}{3}P(Y_n = 1) + P(Y_n = 3),$$

$$P(Y_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}P(Y_n = 2).$$

La matrice demandée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Ainsi $V_{n+1} = BV_n$ pour $n \geq 1$. Cette relation ne s'applique pas au départ en $n = 0$: le point doit d'abord quitter O , conformément à B1.

II.B.1.b)

Question adaptée au programme actuel : les coefficients de la partie I ne sont définis que pour les indices strictement positifs. Leur utilisation est donc réservée à $n \geq 2$, et le cas $n = 1$ est traité séparément.

On a $Y_1 = 1$ sûrement, donc

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La récurrence issue de $V_{n+1} = BV_n$ donne

$$V_n = B^{n-1}V_1 \quad (n \geq 1).$$

Au rang 1, la puissance vaut $B^0 = I_4$ et on retrouve le vecteur initial. Pour $n \geq 2$, posons $m = n - 1 \geq 1$. La relation de I.3.b s'applique à B^m .

Les secondes colonnes des trois puissances utiles donnent

$$BV_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^2V_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/9 \\ 0 \\ 2/9 \end{pmatrix}, \quad B^3V_1 = \begin{pmatrix} 13/27 \\ 0 \\ 14/27 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs peuvent aussi être obtenus successivement en appliquant les quatre formules de transition de II.B.1.a au vecteur précédent.

Par conséquent,

$$V_n = \begin{pmatrix} (a_m + b_m)/3 + 13c_m/27 \\ 4b_m/9 \\ 2a_m/3 + 14c_m/27 \\ 2b_m/9 \end{pmatrix}, \quad m = n - 1, \quad n \geq 2.$$

Les quatre composantes donnent la loi de Y_n . Leur somme est $a_m + b_m + c_m = 1$. La première peut aussi s'écrire $1/3 + 4c_m/27$, puisque $a_m + b_m = 1 - c_m$.

En utilisant les expressions selon la parité de I.2.d, on obtient, pour $k \geq 1$,

$$V_{2k} = \begin{pmatrix} 1 - 2q^{k-1}/3 \\ 0 \\ 2q^{k-1}/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, $m = 2k - 1$, $b_m = 0$ et $c_m = 9(1 - q^{k-1})/2$, ce qui donne la première composante; la troisième est alors son complément à 1.

Pour $k \geq 1$, l'indice $m = 2k$ donne $b_m = q^{k-1}$ et $c_m = 9(1 - q^{k-1})/2$. On en déduit

$$V_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 - 2q^{k-1}/3 \\ 4q^{k-1}/9 \\ 0 \\ 2q^{k-1}/9 \end{pmatrix}.$$

La troisième composante est nulle par la parité, ou par substitution de

$a_m = 1 - b_m - c_m$. Toutes les probabilités sont positives ou nulles et leur somme vaut 1. Le cas $n = 1$ reste le vecteur initial donné séparément.

2. Loi de la variable aléatoire R

II.B.2.a)

Méthode 1 — Égalité des événements et dernier déplacement

Pour $n \geq 1$, si $Y_{2n-1} = 1$ puis $Y_{2n} = 0$, le sommet O n'a pas été visité depuis le départ : sinon l'absorption aurait imposé $Y_{2n-1} = 0$. Réciproquement, pour revenir pour la première fois à O à l'instant $2n$, il faut venir d'un sommet voisin de O , donc de numéro 1.

Ainsi,

$$\{Y_{2n-1} = 1, Y_{2n} = 0\} = \{R = 2n\}.$$

Depuis un sommet de numéro 1, le retour à O a une probabilité égale à $1/3$. Au premier indice, $Y_1 = 1$ sûrement, d'où

$$P(R = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour $n \geq 2$, on utilise la loi de Y_{2n-1} avec $k = n - 1$ dans la formule des instants impairs de II.B.1.b :

$$P(Y_{2n-1} = 1) = \frac{4}{9}q^{n-2}.$$

Donc la loi complète est

$$P(R = 2) = \frac{1}{3}, \quad P(R = 2n) = \frac{4}{27} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Tous les autres instants ont une probabilité de premier retour nulle, car la parité change à chaque pas avant l'absorption. Le cas $n = 1$ ne peut pas être obtenu en introduisant des coefficients a_0, b_0, c_0 inexistantes dans la partie I.

Méthode 2 — Différence des probabilités d'être déjà revenu

L'absorption en 0 donne $\{Y_{2n-1} = 0\} \subset \{Y_{2n} = 0\}$. La différence correspond au premier retour à l'instant $2n$. Pour $n = 1$, $P(Y_1 = 0) = 0$ et $P(Y_2 = 0) = 1/3$, d'où $P(R = 2) = 1/3$.

Pour $n \geq 2$, les lois de II.B.1.b donnent

$$\begin{aligned} P(R = 2n) &= P(Y_{2n} = 0) - P(Y_{2n-1} = 0) = \left(1 - \frac{2}{3}q^{n-1}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}q^{n-2}\right) \\ &= \frac{2}{3}(1 - q)q^{n-2} = \frac{4}{27}q^{n-2}. \end{aligned}$$

On retrouve donc la même loi complète. Comme pour T , le calcul par transition utilise le dernier pas ; le calcul par différence exploite le caractère absorbant du sommet cible.

II.B.2.b)

Méthode 1 — Normalisation de la loi

Comme $0 < q < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(R = 2n) = \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \sum_{n=2}^{+\infty} q^{n-2} = \frac{1}{3} + \frac{4/27}{1-q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Les événements de premier retour étant disjoints, O est revisité presque sûrement. La variable R est donc définie presque sûrement ; sur l'éventuel événement négligeable de non-retour, on peut lui attribuer arbitrairement la valeur 2 sans changer sa loi.

Méthode 2 — Disparition de la probabilité de non-retour

Pour $k \geq 1$, l'absorption en 0 et la loi de Y_{2k} donnent

$$P(\text{aucun retour avant ou à l'instant } 2k) = P(Y_{2k} \neq 0) = \frac{2}{3}q^{k-1}.$$

Ces événements décroissent vers l'événement de non-retour. Par continuité monotone, la probabilité de ce dernier est $\lim_{k \rightarrow +\infty} (2/3)q^{k-1} = 0$.

Le retour est presque sûr, et la somme des probabilités des différents instants de premier retour vaut donc 1. Cette seconde approche vérifie la normalisation à partir des lois de position plutôt qu'à partir de la série de premier retour.

II.B.2.c)

Méthode 1 — Série d'espérance avec traitement du premier terme

La série d'espérance est une somme de termes positifs dominée par une combinaison de séries géométrique et géométrique dérivée ; elle converge puisque $q < 1$. La variable R admet donc une espérance finie.

$$E(R) = \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \sum_{n=2}^{+\infty} nq^{n-2}.$$

En posant $j = n - 2$, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} nq^{n-2} = \sum_{j=0}^{+\infty} (j+2)q^j = \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{2}{1-q}.$$

Ainsi,

$$E(R) = \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \left(\frac{63}{4} + 9 \right) = \frac{2}{3} + \frac{22}{3} = 8.$$

Méthode 2 — Loi conditionnelle après un retour immédiat manqué

Notons $C = \{R > 2\}$. La loi de R donne $P(C) = 2/3 > 0$. Sur C , la variable $N = (R - 2)/2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $j \geq 1$,

$$P(N = j \mid C) = \frac{P(R = 2j + 2)}{P(C)} = \frac{(4/27)q^{j-1}}{2/3} = \frac{2}{9}q^{j-1}.$$

Il s'agit, pour cette probabilité conditionnelle, d'une loi géométrique de paramètre $2/9$. Son espérance est $9/2$, donc $E(R \mid C) = 2 + 2 \times 9/2 = 11$. Sur $\{R = 2\}$, l'espérance conditionnelle de R vaut 2.

Ces deux espérances conditionnelles sont finies ; leur somme pondérée justifie également l'existence de $E(R)$. La formule de l'espérance totale pour le système complet $\{R = 2\}, C$ donne

$$E(R) = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 11 = 8.$$

La première méthode somme directement la loi ; la seconde distingue le retour après deux pas du temps supplémentaire, de forme géométrique, lorsque ce premier retour n'a pas lieu.

Relevé des adaptations

- I.1.d : rectification de la dernière puissance dans la définition de v_n , dont la base est $-\sqrt{7}/3$. La base positive imprimée dans le PDF contredit les termes initiaux et empêcherait la conclusion $v_n = 0$.
- II, préambule : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les positions mesurées des arêtes et les mêmes numéros de sommets. La convention $O \leftrightarrow 0$, déjà utilisée par $X_0 = 0$ et les lois demandées, est explicitée.
- II.B.1.b : la formule utilisant $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ est restreinte à $n \geq 2$; le cas $n = 1$ est traité séparément par $V_1 = {}^t(0, 1, 0, 0)$. Les coefficients d'indice zéro ne sont pas définis et la représentation de la puissance d'indice zéro n'est pas autorisée par la partie I.