



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1993

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

L'objet de ce problème est l'étude d'une suite d'expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p , avec $0 < p < 1$. À chaque expérience, la probabilité de succès est donc p .

Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'analyse, avant d'étudier dans la partie II l'obtention de r succès consécutifs, où r est un entier donné tel que $r \geq 2$.

PARTIE I

On désigne par S l'espace vectoriel réel des suites $u = (u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels. On se propose d'obtenir la limite d'une suite de S vérifiant, pour tout entier $n \geq r - 1$, la relation :

$$(1) \quad u_n + pu_{n-1} + p^2u_{n-2} + \cdots + p^{r-1}u_{n-r+1} = p^r.$$

Pour un entier x , on pose $\theta_x = 2\pi x/r$. Pour chaque entier $n \geq 0$, on définit $f_0(n) = 1$. En posant $\ell = \lfloor (r-1)/2 \rfloor$, on définit aussi, pour $1 \leq k \leq \ell$:

$$f_{2k-1}(n) = \cos(2\pi kn/r), \quad f_{2k}(n) = \sin(2\pi kn/r).$$

Si r est pair, on complète ces définitions par $f_{r-1}(n) = (-1)^n$. On obtient ainsi r suites réelles $f_0, \dots, f_{r-1}$.

On rappelle les identités suivantes, déduites des formules d'addition :

$$2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b).$$

1.

- a) Montrer que chacune des suites $f_0, \dots, f_{r-1}$ est périodique de période r , au sens où $f_j(n+r) = f_j(n)$ pour tous les indices concernés.

b) Pour des entiers x, y , déterminer les sommes :

$$s_r(x) = \sum_{n=0}^{r-1} \cos(n\theta_x), \quad t_r(x, y) = \sum_{n=0}^{r-1} \cos(n\theta_x) \cos(n\theta_y),$$

ainsi que

$$\sum_{n=0}^{r-1} \sin(n\theta_x),$$

$$\sum_{n=0}^{r-1} \sin(n\theta_x) \sin(n\theta_y)$$

et

$$\sum_{n=0}^{r-1} \sin(n\theta_x) \cos(n\theta_y).$$

Pour calculer $s_r(x)$, distinguer selon que x est ou non un multiple de r . On pourra utiliser l'invariance des sommes par un décalage cyclique de l'indice et les identités rappelées ci-dessus.

2.

On considère la matrice réelle M_r d'ordre r définie par :

$$(M_r)_{n+1, j+1} = f_j(n) \quad (0 \leq n, j \leq r-1).$$

a) Expliciter M_4 , puis calculer ${}^t M_4 M_4$.

b) À l'aide des résultats de la question 1, expliciter ${}^t M_r M_r$ dans le cas général et en déduire que M_r est inversible.

c) On considère r réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}$ tels que :

$$\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j f_j(n) = 0 \quad (0 \leq n \leq r-1).$$

Établir que ces r réels sont nuls.

d) En déduire l'indépendance des r suites réelles $e_0, \dots, e_{r-1}$ définies par :

$$e_j = (p^n f_j(n))_{n \geq 0}.$$

3.

On étudie les suites $v = (v_n)$ de S vérifiant, pour tout entier $n \geq r-1$:

$$(2) \quad v_n + p v_{n-1} + p^2 v_{n-2} + \dots + p^{r-1} v_{n-r+1} = 0.$$

a) Établir que les suites vérifiant (2) forment un sous-espace vectoriel E de S .

b) Prouver que l'application $F : E \rightarrow \mathbb{R}^{r-1}$ définie par $F(v) = (v_0, v_1, \dots, v_{r-2})$ est linéaire et bijective. En déduire la dimension de E .

c) Établir que $e_1, \dots, e_{r-1}$ appartiennent à E . Déterminer également toutes les suites géométriques réelles de premier terme égal à 1 appartenant à E , en distinguant selon la parité de r .

d) En déduire que $e_1, \dots, e_{r-1}$ forment une base de E . Donner la forme générale des suites vérifiant (2), puis leur limite lorsque n tend vers $+\infty$.

4.

On étudie les suites réelles $u = (u_n)$ vérifiant (1).

a) Déterminer une suite constante $c = (c_n)$ vérifiant (1).

- b) Établir que u vérifie (1) si et seulement si $v = u - c$ vérifie (2).
- c) En déduire la limite d'une suite u vérifiant (1).

PARTIE II

On étudie la réalisation de suites de r succès consécutifs au cours des expériences de Bernoulli du préambule. Pour tout entier $n \geq 1$, on note S_n l'événement « Obtenir un succès à la n -ième expérience ».

1. Probabilité d'obtenir au moins une suite de r succès

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère :

$$E_n = S_{rn-(r-1)} \cap \dots \cap S_{rn-1} \cap S_{rn},$$

c'est-à-dire l'événement « Obtenir un succès aux expériences $rn - (r - 1), \dots, rn - 1, rn$ ».

- a) Déterminer les probabilités des événements $\bigcap_{k=1}^n \overline{E_k}$ et $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E_k}$, intersections des complémentaires de $E_1, \dots, E_n$, puis de tous les E_k .
- b) En déduire que l'obtention de r succès consécutifs est un événement réalisé avec une probabilité égale à 1.

2. Probabilité d'obtenir une suite de r succès s'achevant à la n -ième expérience

Pour $n \geq r$, on note U_n l'événement « Obtenir une suite de r succès consécutifs s'achevant à la n -ième expérience, c'est-à-dire des succès aux expériences $n - (r - 1), \dots, n - 1, n$, dont aucun n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r succès consécutifs ».

Les suites sont comptabilisées chronologiquement : dès qu'un groupe de r succès consécutifs est achevé, ses succès ne sont plus réutilisés pour un groupe ultérieur.

Par exemple, pour $r = 3$, en désignant par S un succès et par E un échec, la suite :

SSSSSSSEESSSSSESESSSE...

mène à la réalisation de $U_3, U_6, U_{12}, U_{20}, \dots$

On note $u_n = P(U_n)$ et on pose, par convention, $u_0 = 1$ et $u_1 = \dots = u_{r-1} = 0$.

- a) Montrer que la réalisation de $S_{n-(r-1)} \cap \dots \cap S_n$ implique la réalisation d'un et un seul des événements $U_{n-(r-1)}, \dots, U_n$ pour $n \geq r$. En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifie la relation (1) pour $n \geq r$. Appliquer la partie I à la suite décalée $(u_{n+1})_{n \geq 0}$ et déterminer la limite L de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- b) En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité qu'une suite de deux Faces, respectivement de deux As, consécutifs s'achève à la n -ième expérience dans une suite de jets d'une pièce équilibrée, respectivement d'un dé équilibré, avec la règle de comptabilisation précédente.

3. Étude de la première suite de r succès consécutifs

On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro de l'expérience où, pour la première fois, s'achève une suite de r succès consécutifs. Dans l'exemple de la question 2, $X = 3$.

On pose par convention $P(X = 0) = P(X = 1) = \dots = P(X = r - 1) = 0$.

- a) Vérifier à l'aide des résultats de la question 1 que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N P(X = n) = 1.$$

- b) Pour $x \in [0, 1[$, on pose :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (1) que :

$$U(x) = 1 + \frac{(px)^r}{1 - (px)^r} \frac{1 - px}{1 - x}.$$

- c) Pour $n \geq r$, montrer que, si U_n est réalisé, une première suite de r succès consécutifs s'est achevée à l'une des n premières expériences. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$:

$$(3) \quad u_n = \sum_{k=0}^n P(X = k) u_{n-k}.$$

- d) À deux séries convergentes à termes positifs ou nuls

$$\sum_{n \geq 0} a_n$$

et

$$\sum_{n \geq 0} b_n,$$

on associe la série-produit

$$\sum_{n \geq 0} c_n,$$

où :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Vérifier que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n c_k \leq \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

En déduire la convergence et la somme de la série-produit.

e) Pour $x \in [0, 1]$, on pose :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis déterminer une relation liant $U(x)$ et $G(x)$ pour $x \in [0, 1[$. On pourra multiplier (3) par x^n et sommer les égalités pour $n \geq 1$.

f) En déduire l'expression de $G(x)$ pour $0 \leq x < 1$, puis vérifier que G est continue, y compris en $x = 1$.

4. Temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs

a) Soit T le numéro du premier bloc E_k réalisé. Déterminer la loi de T , puis utiliser $X \leq rT$ pour justifier que X admet une espérance finie.

Établir ensuite, par encadrement de sommes et passage à la limite, que :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - G(x)}{1 - x}.$$

Déterminer l'espérance de X à l'aide de l'expression de G obtenue en 3.f.

b) On suppose $p = 1/2$ (pièce équilibrée), puis $p = 1/6$ (dé équilibré), et on effectue une expérience chaque seconde. Donner dans un tableau, en secondes, minutes, heures, jours et années, le temps moyen d'attente de la première suite de r succès consécutifs pour $r = 5$, $r = 10$ et $r = 25$.

On utilisera une année de 365 jours. À titre de comparaison, la valeur de référence donnée pour l'âge de l'Univers dans ce problème est de 15 milliards d'années.