



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 2

1991

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, on désigne par n un entier donné supérieur ou égal à 2, et par j un entier supérieur ou égal à 1.

Partie I

Dans cette partie, on désigne par $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$. On considère l'application F associant à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ la fonction polynôme Q définie, pour tout réel t , par :

$$Q(t) = P(t) + \frac{1-t}{n}P'(t).$$

1. Étude de l'application F

- a) Montrer que F est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- b) On considère, pour $1 \leq k \leq n$, la fonction polynôme P_k définie par $P_k(t) = t^{n-k}$.
Expliciter la fonction polynôme $Q_k = F(P_k)$.
- c) Déterminer la matrice M de F dans la base $\mathcal{B} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Étude des éléments propres de F

- a) Donner les valeurs propres de F . L'endomorphisme F est-il diagonalisable?
- b) Déterminer le sous-espace propre de F associé à la valeur propre 1.
- c) Soient k un entier tel que $1 \leq k < n$ et P un élément non nul de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que
$$F(P) = \frac{n-k}{n}P.$$

Montrer que $P(1) = 0$.

On convient alors de poser $P(t) = (t-1)^r R(t)$, avec $1 \leq r < n$ et $R(1) \neq 0$. Quelle relation vérifient alors r et R ? En déduire que $r = k$ et préciser le degré de R .

- d) Déterminer les sous-espaces propres de F associés aux différentes valeurs propres de F .

3. Étude d'une suite $U_{j+1} = F(U_j)$

On considère la suite de fonctions polynômes définie par $U_1(t) = t^{n-1}$, puis $U_{j+1} = F(U_j)$.

- a) Établir l'égalité suivante pour tout réel t :

$$U_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (t-1)^k.$$

- b) En déduire $U_2(t)$, $U_3(t)$, puis, par récurrence, $U_j(t)$ comme combinaisons linéaires de $1, t-1, \dots, (t-1)^{n-1}$.

Expliciter alors $U_j(0)$ sous forme d'une somme.

Partie II

Dans toute la suite du problème, on considère un marché sur lequel n fournisseurs proposent des biens identiques à des consommateurs. Les commandes de ces derniers arrivent successivement et de façon indépendante auprès de ces n fournisseurs, chacun d'eux étant choisi de façon équiprobable.

On désigne :

- par X_j la variable aléatoire indiquant le nombre des fournisseurs ayant reçu au moins une commande de l'un des j premiers consommateurs ;
- par $P(X_j = k)$ la probabilité de l'événement $[X_j = k]$, où $k = 1, 2, \dots, n$;
- par $E(X_j)$ et $V(X_j)$ l'espérance et la variance de X_j .

1. Étude de la loi des variables aléatoires X_j

- a) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Donner les probabilités conditionnelles

$$P(X_{j+1} = k \mid X_j = k) \text{ et } P(X_{j+1} = k \mid X_j = k - 1), \text{ lorsque } k \geq 2.$$

Que vaut $P(X_{j+1} = k \mid X_j = i)$ lorsque $1 \leq i \leq n$, l'entier i étant distinct de $k - 1$ et de k ?

Les probabilités conditionnelles de cette question sont demandées uniquement lorsque l'événement de conditionnement a une probabilité strictement positive.

- b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'expression de

$$P(X_{j+1} = k) \text{ en fonction des probabilités } P(X_j = i), \text{ où } 1 \leq i \leq n.$$

On convient, dans la suite de cette partie, de poser, pour tout entier $j \geq 1$:

$$G_j(t) = \sum_{k=1}^n P(X_j = k) t^{n-k}.$$

2. Étude de la suite (G_j)

- a) Préciser G_1 , puis déduire de la question précédente que $G_{j+1} = F(G_j)$. Vérifier alors que cette suite (G_j) n'est autre que la suite (U_j) définie en I.3.

- b) En déduire l'expression de $P(X_j = n)$. À l'aide d'un raisonnement probabiliste, établir que, si $1 \leq j < n$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} = 0.$$

- c) Prouver que $P(X_j = n)$ tend vers 1 lorsque j tend vers $+\infty$, et en déduire quelles sont les limites de $E(X_j)$ et $V(X_j)$ lorsque j tend vers $+\infty$.

3. Calcul de l'espérance de X_j

- a) Calculer $G_j(1)$, puis exprimer $G'_j(1)$ en fonction de $E(X_j)$ et de n .
- b) À l'aide de la relation $G_{j+1} = F(G_j)$, exprimer $G'_{j+1}(1)$ en fonction de $G'_j(1)$. Que vaut $G'_1(1)$?
- c) En déduire $G'_j(1)$, puis $E(X_j)$ en fonction de j et de n . Retrouver ainsi la limite de $E(X_j)$ lorsque l'entier j tend vers $+\infty$.

Partie III

On désigne par T la variable aléatoire indiquant le nombre de consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des n fournisseurs a reçu au moins une commande.

1. Étude de la loi de la variable aléatoire T

- a) Comparer les deux événements $[T \leq j]$ et $[X_j = n]$. En déduire $P(T = j + 1)$ en fonction de $P(X_{j+1} = n)$ et de $P(X_j = n)$.

On a bien entendu $P(T = 1) = P(X_1 = n)$, ces deux expressions étant nulles.

- b) Évaluer $P(T = 1) + P(T = 2) + \dots + P(T = j)$ en fonction de $P(X_j = n)$. En déduire que :

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(T = j) = 1.$$

c) Dédurre enfin de l'expression de $P(X_j = n)$ obtenue en II.2 que :

$$P(T = j + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

2. Étude de l'espérance de T

a) Donner l'expression, pour $1 \leq k < n$, de la somme suivante :

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} j \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

b) En déduire que :

$$E(T - 1) = n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n-1}{k}}{k}.$$

c) Établir, pour tout réel x appartenant à $[0, 1]$, la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1}.$$

d) En déduire, par intégration de l'égalité précédente sur $[0, 1]$, que :

$$E(T) = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

3. Évaluation asymptotique de $E(T)$

a) Écrire en Python un algorithme permettant d'obtenir $E(T)$ en fonction de n .

b) À l'aide de cet algorithme, donner, dans les deux cas $n = 10$ et $n = 100$, une valeur approchée du nombre moyen des consommateurs ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des fournisseurs a reçu au moins une commande.

c) Établir, pour tout entier $k \geq 1$, l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Quel équivalent de $E(T)$ en déduit-on lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?